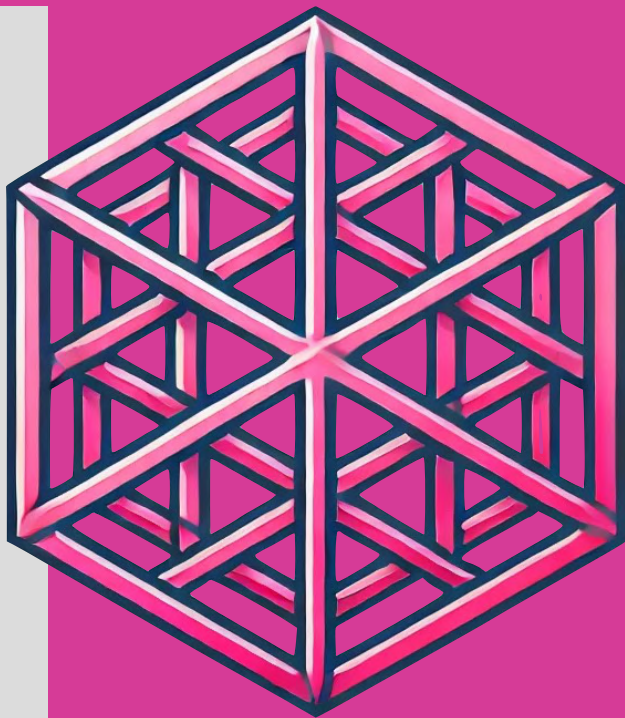


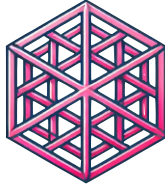
Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes (REMED)

ISSN: 3061-8282



Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación
de la Educación Matemática A.C. (SOMIDEM)





Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes (REMEDI)



Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación
de la Educación Matemática A.C.

Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes (REMEDI)

Volumen 2, Número 1, enero de 2026

© Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes (REMEDI), octubre de 2025, vol. 2 núm. 1, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C. (SOMIDEM), con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle Centro, C. P. 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico: revistaremedi@gmail.com

Editor responsable: Mario Sánchez Aguilar y Apolo Castañeda Alonso. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2025-022514380900-102, ISSN 3061-8282 - Formato de la publicación: electrónico, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de enero, junio y octubre, con el financiamiento de la SOMIDEM.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de la Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes (REMEDI), vol. 1, núm. 3, octubre de 2025, son propiedad de D. R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

Las opiniones expresadas por los autores no reflejan necesariamente la postura de los editores de la publicación ni de la SOMIDEM.

Los autores son responsables del contenido de sus contribuciones, incluyendo la exactitud de los datos, la atribución de citas y referencias bibliográficas, el cumplimiento de los derechos de autor y la gestión de la coautoría. Asimismo, deben garantizar que el material, los textos y las imágenes utilizados respeten los derechos de terceros. REMEDI no asume responsabilidad por el contenido de los trabajos presentados.

Todos los artículos de la REMEDI son de acceso libre y están sujetos a a licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA) <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



Diagramación y corrección de estilo: Ingrid Eleonor Castañeda González, ingrideleonor@gmail.com

Fecha de la última actualización 30 de enero de 2026.

<https://remedi.org.mx>

<https://doi.org/10.24844/REMEDI>

Editores en Jefe

Mario Sánchez Aguilar 
Instituto Politécnico Nacional, México

Apolo Castañeda 
Instituto Politécnico Nacional, México

Editores Asociados

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez 
Cinvestav (Departamento de Matemática Educativa), México

Carlos Valenzuela García 
Universidad de Guadalajara, México

David Block Sevilla 
Cinvestav (Departamento de Investigaciones Educativas), México

Yolanda Chávez Ruiz 
SOMIDEM, México

Luis Manuel Aguayo Rendón 
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas

María García González 
Universidad Autónoma de Guerrero

Editores de Sección

Francisco Sepúlveda Vega 
Cinvestav (Departamento de Matemática
Educativa), México

Juan Manuel Córdoba Medina 
Escuela Normal Superior del Estado de
México

Catalina Navarro Sandoval 
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Luz Graciela Orozco Vaca 
Secretaría de Educación Jalisco,
México

María Guadalupe Vera Soria 
Universidad de Guadalajara,
México

Cristian Nava Guzmán 
Universidad Autónoma del Estado de
Hidalgo, México

Yesenia Esmeralda Basaldú Gutiérrez 
Centro de Estudios Universitarios los
Ángeles, Oaxaca, México

Carolina Rubí Real Ortega 
Escuela Normal Superior de México,
México

Verónica Vargas Alejo 
Universidad de Guadalajara,
México

Guadalupe Cabañas Sánchez 
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez 
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Juan de Dios Viramontes Miranda 
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,
México

Isaías Miranda Viramontes 
Instituto Politécnico Nacional,
México

Heidy Cecilia Chavira 
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,
México

Rosa Isela González-Polo 
Universidad Autónoma del Estado de
México

Judith Alejandra Hernández Sánchez 
Universidad Autónoma de Zacatecas,
México

Luis Manuel Cabrera Chim 
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica
y Electrónica, Puebla, México

Lady Elena Sosa Moguel 
Universidad Autónoma de Yucatán,
México

Rubén Alejandro Águeda Altúzar 
SOMIDEM, México

César Lozano Díaz
ITESO, México

Santiago Alonso Palmas Pérez 
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Lerma

Saúl Elizarraras Baena 
Escuela Normal Superior de México

Editores de Sección

Guadalupe Carmona 

University of Texas at San Antonio,
Estados Unidos de América

Elizabeth Hernández Arredondo 

Universidad de los Lagos,
Chile

Mihály André Martínez Miraval 

Pontificia Universidad Católica del
Perú

Carlos Amilcar Fuentes Fuentes 

Universidad San Carlos,
Guatemala

Cristina Ochoviet Filgueiras 

Consejo de Formación en Educación,
Uruguay

Wilmer Ríos-Cuesta 

Universidad de Antioquia,
Colombia

Verónica Molfino Vigo 

Consejo de Formación en Educación,
Uruguay

Melissa Andrade-Molina 

Pontificia Universidad Católica de
Valparaíso, Chile

Paola Alejandra Balda Álvarez 

Universidad Pedagógica Nacional,
Colombia

Dinazar Isabel Escudero Ávila 

Universidad Complutense de Madrid,
España

Jaime Israel García García 

Universidad Metropolitana de Ciencias
de la Educación, Chile

Luis Roberto Pino-Fan 

Universidad de los Lagos,
Chile

Eric Flores Medrano 

Universidad Complutense de Madrid,
España

Índice

Editorial

Escritura docente, pluralidad y circulación del conocimiento
en educación matemática

Apolo Castañeda y Mario Sánchez Aguilar 9

Análisis de Experiencias en el Aula

Desarrollo de la intuición en estocásticos para la toma de decisiones

María de Lourdes Santana Salinas y Ricardo Quintero Zazueta 15

Razonamiento geométrico en una tarea de isometrías

Ángel Colín y Rafael Ramírez 31

La función del Cuerpo en la comprensión del número. La experiencia
de un estudiante con discapacidad intelectual en un aula inclusiva

Elizabeth Rosales González y Ricardo Quintero Zazueta 43

Innovaciones en educación matemática

Aplicaciones de la teoría de la actividad en el análisis de procesos de
enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Edgar Vázquez Grande 59

Retos y perspectivas en la enseñanza de las matemáticas

Del libro de texto al aprendizaje: análisis APOE de la comprensión
de la dependencia lineal

Irenisolina Antelo Lopez y César F. Romero Félix 83



Escritura docente, pluralidad y circulación del conocimiento en educación matemática

Teacher Writing, Plurality, and the Circulation of Knowledge in Mathematics Education

Apolo Castañeda  | acastane@ipn.mx
Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria,
Programa de Matematica Educativa

Mario Sánchez Aguilar  | mosanchez@ipn.mx
Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria,
Programa de Matematica Educativa

Enero de 2025 marcó el inicio de la publicación de la Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes (REMEDI). Su aparición respondió a la ampliación de un circuito académico ya consolidado, y además, a la necesidad de abrir un espacio editorial orientado a la escritura docente, entendida como ejercicio de reflexión pública sobre la práctica de aula. Desde su primer número, la revista planteó una línea editorial centrada en la enseñanza de las matemáticas narrada, analizada y discutida por quienes participan de forma directa en los procesos educativos, con textos que emergen de la experiencia escolar y buscan una circulación más allá del ámbito inmediato donde se producen (Sánchez Aguilar & Castañeda, 2025).

REMEDI puede entenderse como una conversación en curso que se construye a través de sus números y de las relaciones que se establecen entre los textos publicados. Cada artículo incorpora una mirada situada sobre la enseñanza de las matemáticas y, al hacerlo, entra en diálogo con otros trabajos que parten de contextos escolares distintos, trayectorias profesionales diversas y marcos teóricos variados. Esta articulación progresiva

progresiva hace que la revista trace líneas de reflexión compartidas, sin requerir una perspectiva única ni un enfoque dominante, lo que amplía el campo de comprensión sobre los problemas asociados al aprendizaje matemático. Esta pluralidad de voces mantiene cercanía con el planteamiento de la heteroglosia desarrollado por Bajtín, quien concibe el sentido como resultado de la interacción entre enunciados que conservan su singularidad en un espacio discursivo común (Bakhtin, 1981). Desde esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas aparece como una práctica atravesada por múltiples formas de decir, interpretar y actuar, cada una anclada en experiencias y realidades educativas específicas. La convivencia de estas voces favorece un entendimiento más amplio del trabajo docente, al permitir que distintas interpretaciones entren en relación y se enriquezcan de forma recíproca.

En este marco, enseñar matemáticas se configura como una práctica que implica reflexión, escritura y discusión colectiva. La revista propicia ese proceso al ofrecer un espacio editorial que pone en contacto experiencias de aula, reflexiones curriculares y lecturas situadas de problemáticas contemporáneas. La construcción del conocimiento ocurre a través de este intercambio, en el que cada texto aporta una posición que dialoga con otras y contribuye a un entendimiento compartido de los retos educativos actuales, tal como se desprende de los trabajos publicados en su primer año (Sánchez Aguilar & Castañeda, 2025).

Desde esta perspectiva, el proyecto editorial se mantiene abierto a perspectivas teóricas diversas y a formas distintas de aproximarse a la enseñanza de las matemáticas. La inclusión de voces heterogéneas fortalece la conversación colectiva y amplía las posibilidades de interpretación y análisis. En el marco dialógico propuesto por Bajtín, la revista asume que el avance en la comprensión de los problemas educativos se construye mediante la interacción sostenida entre miradas distintas, reunidas en un espacio común de escritura y lectura compartida.

Desde su planteamiento inicial, la revista se dirige a docentes de matemáticas como interlocutores centrales del proyecto editorial. Esta decisión define su identidad y orienta el tipo de textos que circulan en cada número. A diferencia de publicaciones centradas en la evaluación de investigaciones bajo formatos metodológicos estandarizados, la revista prioriza la escritura que surge de la práctica profesional, del análisis situado y de la reflexión sostenida sobre el trabajo escolar. Esta orientación reconoce que el conocimiento sobre la enseñanza también se produce en espacios que habitualmente permanecen fuera de los circuitos académicos dominantes.

Este posicionamiento dialoga con planteamientos que han cuestionado la centralidad exclusiva de ciertos modos de producción de conocimiento.

Autores como Boaventura de Sousa Santos han señalado que existen saberes producidos en contextos periféricos que poseen legitimidad epistemológica, aun cuando carecen de visibilidad en espacios académicos tradicionales (Santos, 2010). Desde esta perspectiva, las voces que emergen del aula, de la formación docente y de trayectorias profesionales diversas aportan interpretaciones relevantes sobre la enseñanza de las matemáticas, al situar los problemas educativos en condiciones concretas de trabajo y experiencia.

REMEDI se inscribe en esta línea al asumirse como un espacio alternativo de circulación y reflexión de saberes. En este sentido, la revista asume que el desarrollo del campo educativo requiere espacios que reconozcan la pluralidad de saberes y trayectorias profesionales. Al dirigirse de forma explícita a los docentes de matemáticas, el proyecto editorial busca consolidarse como un lugar de interlocución que amplía el horizonte de discusión y contribuye a una comprensión más compleja de los procesos de enseñanza y aprendizaje en contextos reales.

El primer año de publicación se desarrolló bajo el esquema editorial previamente definido de tres números al año, cada uno con un mínimo de cinco artículos. Los números aparecidos en enero y junio siguieron una estructura regular orientada a experiencias docentes, análisis de práctica y reflexiones didácticas, mientras que el número de octubre se organizó como un volumen especial dedicado a la Nueva Escuela Mexicana.

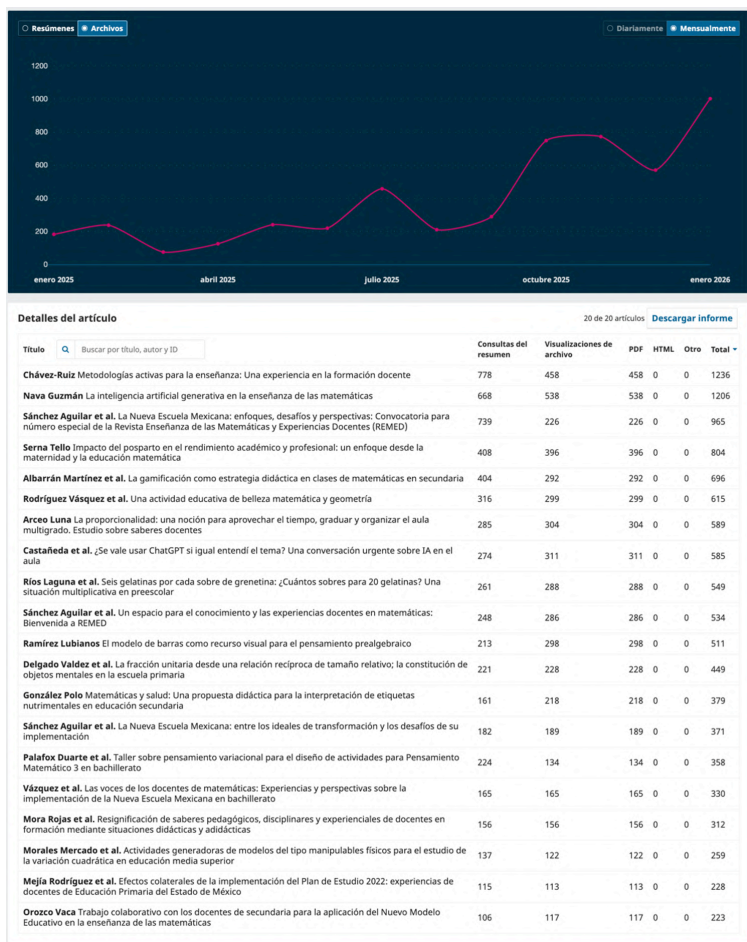
El registro acumulado muestra más de mil consultas en varios artículos, con una relación elevada entre visualizaciones de archivo y consultas de resumen. La distribución de la atención presenta una concentración moderada. Un conjunto reducido de artículos reúne una proporción importante de las consultas totales, en particular aquellos vinculados con metodologías de enseñanza, inteligencia artificial en educación matemática, formación docente y debates en torno a la Nueva Escuela Mexicana.

Este comportamiento del lector perfila intereses asociados a problemáticas vigentes del trabajo docente y a la necesidad de interpretar transformaciones curriculares y tecnológicas en curso. Al mismo tiempo, el resto de los artículos mantiene niveles constantes de consulta, lo cual muestra una circulación amplia del conjunto del catálogo publicado. El análisis temporal de las consultas mensuales permite observar un crecimiento sostenido a lo largo del año editorial, con incrementos visibles hacia el cierre de 2025 y el inicio de 2026.

Este comportamiento coincide con la publicación del número especial dedicado a la Nueva Escuela Mexicana y con la ampliación del repertorio de textos disponibles. La secuencia de lecturas muestra que la revista comienza a consolidarse como un referente de consulta continua, más que

como un espacio asociado únicamente a la aparición puntual de cada número (Figura 1).

Figura 1
Estadísticas de REMED



La diversidad de enfoques, intereses y registros en los textos publicados en REMED durante este primer año remite a una característica estructural del campo de la educación matemática. Es un ámbito heterogéneo que se configura a partir de trayectorias profesionales distintas, preocupaciones situadas y formas variadas de aproximarse a la enseñanza. La reflexión colectiva que se construye en REMED se nutre de esa diversidad, mediante la reunión de miradas que dialogan desde contextos escolares, institucionales y formativos diferenciados.

Esta pluralidad encuentra un soporte institucional en la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática. Desde su origen, SOMIDEM ha promovido espacios de encuentro entre docentes, formadores e investigadores, con el propósito de sostener el intercambio y la discusión en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. REMED se inscribe como una expresión editorial de esta vocación, al ofrecer un espacio que articula voces provenientes de distintos escenarios educativos y regiones del país.

REMED responde a una lógica colectiva. Su desarrollo involucra el trabajo coordinado de editores asociados, revisores, consejo editorial, equipo de edición y maquetación, así como la participación de autoras y autores que confían sus textos al proyecto. Esta red de colaboración define una dinámica editorial rigurosa y configura a la revista como un espacio de encuentro activo, orientado a la circulación y discusión de ideas, más que a la exhibición de productos cerrados.

En este sentido, REMED se configura como un espacio en permanente movimiento que se construye a partir de la interacción entre quienes escriben, evalúan, editan y leen. La apuesta por reunir voces diversas responde a la convicción de que la comprensión de los problemas educativos se fortalece mediante el intercambio sostenido y la construcción compartida de sentido. La revista se proyecta así como un lugar común en el que la pluralidad de experiencias y perspectivas encuentra condiciones para dialogar y continuar ampliando la reflexión colectiva sobre la enseñanza de las matemáticas.

La puesta en marcha de un proyecto editorial implica decisiones que trascienden la definición de una línea temática. Publicar una nueva revista en un escenario con opciones consolidadas plantea preguntas sobre su sentido, su lugar y su función dentro del campo educativo. REMED surgió con una identidad clara, orientada a la escritura docente y a la reflexión situada sobre la enseñanza de las matemáticas, lo que requirió sostener esa orientación en cada fase del proceso editorial.

La edición académica supone un trabajo constante de coordinación, revisión y toma de decisiones. Mantener procesos claros, criterios explícitos y tiempos definidos demanda un esfuerzo sostenido por parte del equipo editorial. A lo largo de este primer año, la experiencia acumulada permitió ajustar procedimientos, fortalecer la comunicación con autores y revisores, y afinar mecanismos de evaluación acordes con el perfil de la revista. Estos aprendizajes se construyeron a partir de la práctica editorial misma y del diálogo interno entre quienes participan en el proyecto. Este recorrido también permitió reconocer la importancia de sostener rigor editorial sin perder coherencia con la identidad de la revista. La evaluación de textos, la

selección de dictaminadores y el acompañamiento de los procesos de revisión requieren un equilibrio entre exigencia académica y reconocimiento de formas diversas de escritura profesional. Este equilibrio constituye uno de los aprendizajes centrales del primer año y orienta las decisiones editoriales hacia adelante.

El proyecto editorial que hoy se consolida tiene antecedentes que remiten a reflexiones previas sobre la necesidad de abrir espacios para la escritura docente en matemáticas. Las ideas planteadas por los editores hace unos 20, sobre una posible revista, encontraron condiciones de maduración en la actualidad en un contexto distinto, con una comunidad dispuesta a sostenerlas colectivamente. Este primer año permitió confirmar la pertinencia de ese planteamiento y sentar bases para una proyección más amplia.

De cara al segundo año de publicación, la experiencia acumulada se traduce en objetivos editoriales definidos. Entre ellos se encuentra el fortalecimiento de los procesos internos, la ampliación de la visibilidad de la revista y el avance hacia su incorporación en índices reconocidos. Estas metas se articulan con la convicción de que REMED puede ocupar un lugar relevante dentro del campo de la educación matemática, con un perfil propio y complementario al de otras publicaciones existentes. Más que ocupar un espacio ya trazado, el proyecto busca contribuir a un diálogo necesario y sostenido sobre la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

- Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays*. University of Texas Press.
- Sánchez Aguilar, M., & Castañeda, A. (2025). Un espacio para el conocimiento y las experiencias docentes en matemáticas. Bienvenida a REMED. *Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes*, 1(1), 9–14.
- Santos, B. de S. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Ediciones Trilce.



Desarrollo de la intuición en estocásticos para la toma de decisiones

Developing intuition in stochastics for decision-making

María de Lourdes Santana Salinas  | lourdes.santana@cinvestav.mx
Cinvestav

Ricardo Quintero Zazueta  | quintero@cinvestav.mx
Cinvestav

Recepción: 26 de octubre de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

En el presente se reporta una experiencia de enseñanza para el desarrollo de la intuición mediante una versión simplificada del modelo de correlación lineal para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre con estudiantes de tercero de secundaria. Se realizó un taller en una escuela secundaria de la Ciudad de México, que constó de ocho sesiones de trabajo, con el objetivo de guiar a los estudiantes desde sus intuiciones primarias hacia un análisis más formal mediante el uso de un modelo de correlación lineal. El diseño consideró actividades dentro y fuera del aula con el propósito de explorar el desarrollo del razonamiento estadístico. Se partió del uso de tablas para la organización de datos y representaciones gráficas hasta llegar a la aplicación del modelo de correlación lineal. El estudio se orientó en analizar la pertinencia de su inclusión en el programa de estudios en la educación secundaria por la relevancia que tiene para orientar la toma de decisiones. Los desafíos que destacaron fueron el tiempo destinado a la enseñanza del modelo, su aplicación mediante tecnología y el diseño de materiales de trabajo con temas de interés para los alumnos que favorezca la transición de un pensamiento intuitivo a uno analítico.

Palabras clave

Enseñanza, taller, estocásticos, correlación, secundaria

Abstract

This paper reports on a teaching experience aimed at developing intuition through a simplified version of the linear correlation model for decision-making in situations of uncertainty with third-year secondary school students. A workshop was held at a secondary school in Mexico City, consisting of eight working sessions, with the aim of guiding students from their primary intuitions towards a more formal analysis using a linear correlation model. The design included activities inside and outside the classroom with the purpose of exploring the development of statistical reasoning. It began with the use of tables for data organization and graphical representations and ended with the application of the linear correlation model. The study focused on analyzing the relevance of its inclusion in the secondary school curriculum due to its importance in guiding decision-making. The challenges that stood out were the time allocated to teaching the model, its application using technology, and the design of work materials with topics of interest to students that would facilitate the transition from intuitive to analytical thinking.

Keywords

Teaching, workshop, stochastic, correlation, secondary

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y estadística permiten apreciar y representar ciertos aspectos de la realidad de forma que puedan ser analizados para tomar decisiones informadas (Chick & Pierce, 2012). En el reporte *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE)(Franklin et al., 2005) se destaca que el desarrollo de un razonamiento estadístico requiere de un largo proceso de aprendizaje para adquirir las habilidades necesarias para desarrollar sensibilidad en la apreciación de eventos aleatorios y su representación matemática. Tales habilidades se fortalecen con la educación formal. En una revisión de dos libros de texto aprobados oficialmente en México para la enseñanza de la probabilidad y estadística en secundaria correspondientes a dos planes de estudio diferentes, se observa una disminución en los contenidos abordados acerca de estos temas.

Por ejemplo, en el libro de Cuevas et al. (2014) de tercero de secundaria se encuentran temas de estudio sobre estocásticos, tales como análisis y representación de datos estadísticos, escala de probabilidad, cálculo de probabilidades de eventos mutuamente excluyentes, complementarios e independientes, desviación media y rango. En el texto “Saberes y pensamiento científico” para el mismo grado escolar (Secretaría de Educación Pública, 2024a), en la sección destinada al estudio de las Matemáticas se encuentran únicamente seis temas destinados a la enseñanza de la probabilidad y estadística para todo el curso, prescindiendo de temas

como proporcionalidad, escala de probabilidad, tipos de eventos y análisis de variación lineal, lo que limita la disponibilidad de elementos para la obtención de conclusiones y toma de decisiones. Como consecuencia de la reducción de contenidos, queda incompleta una base de conocimientos para alcanzar un dominio por etapas cada vez más avanzado.

Batanero et al., (2016) mencionan que en México la enseñanza de la probabilidad se demora hasta el nivel de secundaria, debido a que a los profesores de primaria se les dificulta la comprensión de estos temas y no se consideran preparados para su enseñanza. Elizarrarás (2023) hace referencia a que en el nivel secundaria la enseñanza se enfoca en los temas de naturaleza determinista más que en aquéllos de carácter estocástico, limitando la oportunidad de que los alumnos desarrollen desde la educación básica un razonamiento estadístico que les permita analizar sucesos de naturaleza aleatoria.

Con el interés de fomentar una formación orientada a la toma de decisiones en los estudiantes de secundaria, tomando en cuenta el conocimiento y uso de técnicas estocásticas, se diseñó un “Taller de investigación educativa” para ser puesto en práctica con estudiantes del tercer grado. El taller consideró actividades para introducir a los alumnos en la idea de azar y en la diferenciación entre eventos aleatorios y deterministas, un acercamiento a la estadística descriptiva mediante la lectura e interpretación de datos en representaciones gráficas para una y dos variables, toma de datos y cálculo e interpretación del coeficiente de correlación, orientado a la toma de decisiones. Se inició el procesamiento de la información a lápiz y papel para generar un pensamiento crítico y reflexivo desde su recopilación, procesamiento y análisis. Durante el desarrollo del taller se identificaron algunos desafíos para la enseñanza de los temas estocásticos, uno de ellos asociado con los conocimientos previos que los alumnos han adquirido a través de su experiencia, denominados por Fischbein (1971) como “intuiciones primarias”. El presente artículo analiza cómo la secuencia de actividades del taller, basada en la simplificación del modelo de correlación, buscó educar estas intuiciones primarias y transformarlas en intuiciones secundarias más fundamentadas.

Con base en lo anterior, este estudio se plantea los siguientes objetivos específicos:

1. Evaluar la efectividad de una secuencia pedagógica basada en una simplificación cognitiva para la enseñanza de un modelo de correlación lineal y su aplicación en la toma de decisiones.
2. Analizar el desarrollo de la intuición estadística en los estudiantes, observando su transición desde intuiciones primarias hacia un pensamiento más crítico y fundamentado en datos.

3. Identificar los desafíos prácticos de tiempo, diseño de materiales y recursos en la implementación de un enfoque de enseñanza activa en el contexto de la educación secundaria.

Marco teórico

La simplificación y el diseño de materiales de trabajo para el taller se basaron en uno de los principios formulados por Bruner (1960) para mejorar la educación, el cual se refiere a facilitar el aprendizaje de determinados temas mediante una representación apropiada para su comprensión intuitiva y así favorecer la transición a un nivel cognoscitivo más alto que permita un abordaje analítico. Este principio guió el diseño pedagógico de la experiencia de enseñanza.

No obstante que la idea de intuición constituye un constructo complejo que se ha analizado desde la filosofía, la epistemología y la psicología, hay educadores como Fischbein y Gigerenzer que le han prestado atención como una facultad cognitiva susceptible de ser educada. Por una parte, Fischbein (1987) considera a la intuición como una facultad cognitiva susceptible de ser educada a través de la combinación de intuiciones primarias adquiridas en un contexto cultural, social y familiar, e intuiciones secundarias formadas durante un proceso de enseñanza sistemático como parte de un sistema escolarizado (Fischbein et al., 1971).

Con frecuencia, las intuiciones están sujetas a sesgos cognitivos que en el terreno de la toma de decisiones bajo incertidumbre han sido estudiadas con mayor profundidad por Kahneman (2021), quien hace referencia a dos mecanismos, el primero *pensar rápido* que conlleva el uso de atajos cognitivos en la solución de problemas o toma de decisiones que demandan una solución rápida; el segundo, *pensar despacio* implica detenerse a examinar con mayor detalle el uso de métodos analíticos adquiridos en un proceso de enseñanza formal para la obtención de soluciones. El taller se orientó a crear puentes entre el *pensar rápido* intuitivo y el *pensar despacio* analítico en un contexto estadístico. Por otra parte Gigerenzer (2023) considera a la intuición como una habilidad que permite *conocer* más de lo que se puede explicar y que al complementarse con una instrucción formal sobre estocásticos posibilita una toma de decisiones fundamentada en datos.

Para Büscher (2022) la alfabetización estadística ha adquirido una creciente importancia para desarrollar habilidades que permiten evaluar críticamente los datos y la incertidumbre, lo que fortalece el pensamiento analítico necesario para formar intuiciones secundarias. A pesar de que conceptos como la correlación y la regresión son fundamentales para analizar conjuntos de datos y obtener conclusiones a partir de ellos, pocos países los

han incorporado en sus programas de estudio de matemáticas en secundaria (Boller, 2024). En el presente trabajo se considera al pensamiento estocástico como “una forma de procesar la realidad de manera crítica y reflexiva, que incorpora elementos de aleatoriedad, incertidumbre y probabilidades” (Secretaría de Educación Pública, 2024b). El desarrollo de este pensamiento requiere educar la intuición para que opere con herramientas conceptuales pertinentes.

Método

Para la presente intervención se decidió trabajar con el modelo de correlación lineal en una versión simplificada debido a su utilidad en el análisis de la asociación entre dos variables. Esta simplificación responde al principio de Bruner antes mencionado, al privilegiar una representación visual accesible que parta de una comprensión intuitiva, como el diagrama de dispersión y la línea de mejor ajuste, para avanzar hacia el cálculo analítico. La correlación permite profundizar en el análisis de la toma de decisiones, debido a la necesidad de analizar datos de dos o más variables para procesarlos y dar soporte a la definición de cursos de acción, lo que permite prever posibles resultados y evitar realizar inconscientemente correlaciones en situaciones cotidianas o profesionales sin sustento (Osorio et al., 2023).

La experiencia de enseñanza se llevó a cabo en una secundaria pública de la Ciudad de México, para la cual se diseñó un taller de enseñanza de técnicas de análisis estadístico y cálculo matemático básico orientado a evaluar la posibilidad de ocurrencia de eventos en los que interviene el azar. El taller se estructuró en cuatro etapas de trabajo, que se desarrollaron a lo largo de un total de ocho sesiones de clase, cada etapa con un número distinto de sesiones, siguiendo una progresión desde lo intuitivo hacia lo analítico:

- 1) Azar e Incertidumbre. Trabajo con intuiciones primarias
- 2) Estadística descriptiva y representación gráfica intuitiva. Transición a la organización sistemática de datos
- 3) Trabajo experimental
- 4) Uso de tecnología y modelo simplificado. Herramientas para el análisis formal

La simplificación del modelo consistió en considerar como dato la desviación estándar de los valores de las variables analizadas para el trabajo a lápiz y papel. En el trabajo con software se aplicó directamente la fórmula en Excel para obtener el coeficiente de correlación y permitir a los estudiantes centrarse en la interpretación del coeficiente y la gráfica, con el fin de priorizar la comprensión conceptual sobre la destreza operativa.

Durante la experiencia de enseñanza se recolectaron como fuente de datos para el estudio las producciones de los alumnos en sus hojas de trabajo, las notas de campo, observaciones realizadas por los investigadores y las anotaciones de los alumnos en las tareas que realizaron en casa. A continuación se describe en detalle el propósito y el contenido de las actividades del taller.

Etapas 1. Azar e incertidumbre

Sesiones 1 y 2

En la primera sesión se trabajó con temas orientados a la diferenciación de eventos aleatorios y eventos deterministas. Se entregaron notas informativas provenientes de una revista de divulgación y ciencia popular a los alumnos para que identificaran palabras asociadas con un mayor o menor grado de incertidumbre. Se solicitó que la actividad se realizara en equipo para que pudieran discutir distintas interpretaciones. Sus respuestas fueron un indicador para determinar su percepción del tipo de evento como aleatorio o determinista.

En las hojas de trabajo registraron por qué consideraron determinadas expresiones como un evento seguro o como algo que solo podría ocurrir con una determinada probabilidad de ocurrencia estimada subjetivamente. Para reforzar la reflexión en la obtención de resultados en experimentos aleatorios, en la segunda sesión se trabajó con lanzamiento de dados y extracción de pelotas de una urna. Con estos experimentos se buscó motivar el razonamiento acerca del espacio muestral y el cálculo de las oportunidades de éxito en la obtención de un resultado en específico. Aunque la notación resultó incompleta y no se describió la totalidad del espacio muestral, se observó el razonamiento realizado para tratar de listar todos los posibles resultados a partir del experimento.

Etapas 2. La estadística descriptiva y la intuición gráfica

Sesiones 3 y 4

En la tercera sesión se presentó información mediante gráficas de barras y de sectores para su lectura e interpretación a fin de motivar el interés en el acopio, tratamiento y uso de datos. Los temas que se eligieron para esta actividad fueron estadísticas de accidentes por su tipo, daños, víctimas, e información referente al registro de vehículos por entidad federativa. Durante la presentación se formularon algunas preguntas para explorar las ideas de los alumnos de cómo se obtuvo la información: ¿cómo se obtiene la información?, ¿quién la obtiene? y ¿para qué podría servirte esta información si fueras... (diferentes actividades)? Al finalizar la sesión se solicitó dar respuesta a cuatro preguntas orientadas a explorar su apreciación de cómo podrían obtener información propia para evaluar sus opciones de solución a un problema y tomar una decisión.

La cuarta sesión tuvo el propósito de analizar la relación entre dos variables a partir de la tendencia observada en un diagrama de dispersión. Se proporcionó una tabla con el registro de datos para dos variables: ingreso por venta de helados y la temperatura ambiente durante doce días, así como el diagrama de dispersión correspondiente ya elaborado. Esta representación gráfica apeló directamente a la intuición visual de los alumnos para percibir patrones y correlaciones antes de realizar cálculos.

Con el diagrama de dispersión se delineó la tendencia de los datos y el tipo de relación existente entre la temperatura ambiente y la venta de helados para el ejemplo mostrado. Posteriormente se explicó la utilidad del trazo de la línea de mejor ajuste para obtener estimaciones y se solicitó su participación para realizar el trazo de manera perceptiva. El trazado manual de la línea de mejor ajuste es un ejercicio de intuición geométrica que prepara al estudiante para la comprensión del modelo de correlación.

Con esta construcción se realizaron prácticas para estimar el ingreso por venta de helados para diferentes valores dados de la variable temperatura y para estimar el valor de la variable ventas con apoyo en el punto de intersección con la recta de mejor ajuste, a fin de definir la decisión de realizar una mayor o menor inversión para procesar la cantidad de helado que podría esperarse vender, de acuerdo con los datos.

Etapas 3. Toma de datos experimental: De la intuición a la crítica

Sesión 5

Una vez expuestas algunas formas de representación de datos para su análisis, se procedió a realizar actividades al aire libre en el área de deportes de la escuela para la toma de datos experimental, su organización en una tabla, su representación en un diagrama de dispersión y trazar la línea de mejor ajuste de forma manual de acuerdo con su mejor percepción de la tendencia de los datos.

Durante la realización de este trabajo algunos alumnos expresaron una visión crítica respecto a la precisión en el registro de los datos, por ejemplo: la imprecisión de la escala marcada en una columna de la escuela con cinta adhesiva para medir la estatura, la lectura del tiempo empleado para recorrer una distancia fija o el respeto a la línea que marcaba el punto de partida de la carrera para medir el tiempo. Se consideran relevantes estas observaciones porque muestran un cambio de actitud respecto a un tratamiento más cuidadoso de la información.

Esta etapa evidenció la transición de una actitud pasiva en la que se cree en los datos encontrados, a una postura más activa y crítica en la obtención de datos, fundamental en el desarrollo de un pensamiento estadístico. Al inicio del taller la obtención de información se asociaba

principalmente con búsqueda en internet sin cuestionar la calidad de la información.

Etapas 4. Uso de tecnología

Sesiones 6, 7 y 8

En la sesión 6 se optó por trabajar con GeoGebra, ya que sus representaciones gráficas interactivas constituyen una herramienta pertinente para el análisis de datos y con instrucciones básicas los alumnos exploraron diferentes resultados al modificar los valores de las variables, lo que favoreció un aprendizaje autónomo. Esta práctica marcó el inicio de la transición del trabajo manual al uso de tecnología para el procesamiento de datos. El desarrollo de la práctica consideró tres ejemplos.

La Figura 1 muestra uno de los ejercicios resueltos por los alumnos. Este ejemplo destaca la estimación del comportamiento de la variable *cantidad de accidentes* y la relación que se identifica con la *edad del conductor*. Las respuestas a los incisos *a)* y *b)* de este ejemplo son congruentes con la gráfica y línea de tendencia obtenidas con GeoGebra, ya que al trazar una línea perpendicular al eje x en la coordenada $x = 20$ (edad del conductor), en el punto de intersección con la recta de mejor ajuste, la línea horizontal que toca ese punto interseca el eje y en la coordenada $y = 3$ (cantidad de accidentes). Para la pregunta ¿Cuántos accidentes tendría una persona de 20 años? La respuesta es: 3 accidentes.

Figura 1

Ejemplo de respuestas de los alumnos

Ejercicio 3.- Una compañía de seguros de automóvil proporcionó la siguiente información relacionada con la edad de un conductor y el número de accidentes registrados el año pasado.

Edad (x)	Accidentes (y)
16	4
24	2
18	5
17	4
23	0
27	1
32	1
22	3

a) ¿Cuántos accidentes tendría una persona de 20 años? 3

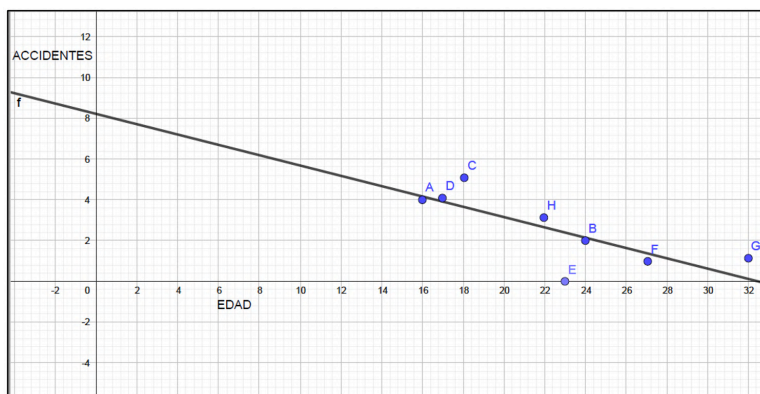
b) ¿Cuántos accidentes espera la compañía de seguros que tenga una persona de 17 años? 4

c) De acuerdo con la información de la muestra, ¿qué pasa con el número de accidentes conforme aumenta la edad? Explica.

*Pues disminuye en las más gente como 27 y 32
a por de los 16 a los 26 son más irresponsables*

Nota. Adaptado de Lind et al., (2012), p. 135

En la Figura 2 se presenta el diagrama de dispersión que sustenta las respuestas a las preguntas del ejercicio anterior.

Figura 2*Gráfica construida con GeoGebra*

Nota. La gráfica representa la tendencia de los datos. Fuente: Elaboración propia.

La sesión 7 se destinó a explicar el cálculo del modelo simplificado de correlación lineal y algunos ejemplos de aplicación. La simplificación del modelo se diseñó para facilitar el proceso de cálculo y abordar exclusivamente el concepto de correlación. Tal simplificación consistió en proporcionar como dato la desviación estándar de los valores de las variables analizadas con la finalidad de facilitar el cálculo matemático manual y obtener el valor del coeficiente de correlación para su interpretación en el contexto de la situación expuesta en la hoja de trabajo. Con el diagrama de dispersión y la línea de mejor ajuste se analizó la tendencia de los datos y su relación con el valor del coeficiente de correlación. En este punto se establece una conexión explícita entre la intuición visual, representada por el diagrama, y la medida analítica, el coeficiente de correlación, para consolidar el aprendizaje.

Se eligió el modelo de Pearson debido a que las operaciones matemáticas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) involucradas en la fórmula no representan un obstáculo para los alumnos y permitiría obtener el cálculo del coeficiente de correlación mediante el uso de una calculadora, en una primera aproximación. Para esta experiencia educativa, las variables con las que se trabajó fueron cuantitativas.

La fórmula utilizada fue la siguiente:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(n - 1) S_x S_y}$$

Donde:

x, y = Valores de las variables en una muestra

$\bar{x}, \bar{y}$ = Media de las variables

n = Número de datos de la muestra

S_x, S_y = Desviación estándar de las muestras (consideradas como dato)

La sesión 8 se dividió en dos partes. En la primera se entregó a los alumnos un único ejercicio para realizar un trabajo individual mediante el programa Excel para calcular el coeficiente de correlación. Una vez obtenido el valor, se pidió a los alumnos explicar cuál era la tendencia de los datos, así como el tipo de relación entre las variables, atendiendo exclusivamente al signo y valor del coeficiente de correlación. Como ejemplo de esta actividad se cita el caso de la detección de piezas defectuosas en una línea de producción. Con el resultado del coeficiente de correlación se preguntó si la velocidad en la línea de producción influía en ese proceso de control de calidad. Una de las respuestas fue: “Sí, ya que si se aumenta la velocidad se detectan menos número de partes defectuosas”. Esta respuesta mostró la interpretación del coeficiente de correlación a partir del signo aplicado a la situación expuesta, y dado que éste fue negativo, se trataba de una relación inversa. Este hecho evidencia la transición de una intuición primaria a una secundaria. A continuación se les pidió obtener el diagrama de dispersión y la línea de mejor ajuste con la finalidad de verificar o corregir la respuesta dada solo con el valor del coeficiente de correlación.

En la segunda parte destinada al cierre del taller, se les pidió asumir el rol de emprendedores de un negocio de venta de pizzas. Se formularon cuatro preguntas por escrito con el objetivo de que sus respuestas reflejaran su toma de decisiones como responsables del negocio hipotético y explorar su disposición para emplear las herramientas trabajadas a lo largo del taller.

Resultados

Los resultados se exponen en relación con el desarrollo progresivo de la intuición estadística a lo largo de las etapas del taller.

Las respuestas de los alumnos a las preguntas de las notas informativas de la primera etapa mostraron una tendencia hacia una visión determinista, ya que se obtuvieron 87% de respuestas de “Sí” o “No” a la pregunta: “*Con seguridad, ¿el consumir un huevo al día nos evitaría sufrir enfermedades cardiovasculares, de acuerdo con la nota?*”. Esto refleja la prevalencia de intuiciones primarias dicotómicas (seguro/inseguro) sobre una comprensión probabilística de la incertidumbre.

En cuanto al experimento aleatorio de lanzamiento de dados, 8.3% de los estudiantes expresaron de forma correcta y con notación el espacio muestral, 87.5% lo expresaron incompleto y con notación equivocada y el

restante 4.2% no evidenció respuesta. En este ejemplo se observa en las respuestas de los alumnos una dificultad para evaluar y describir los posibles resultados del experimento, lo cual refleja limitaciones para visualizar resultados alternativos que podrían obtenerse cuando se toma una decisión en diferentes escenarios tales como el entorno escolar, familiar o social, lo que representaría una restricción para la toma de decisiones informada. La práctica con el lanzamiento de dados, aun cuando parece rutinaria, evidenció la ausencia en la consideración de la probabilidad de ocurrencia de otros resultados cuando predomina una visión determinista. En la actividad destinada al trabajo de extracción de pelotas de una urna en la cual se les solicitó realizar el cálculo de la medida de la probabilidad expresada como fracción para la extracción de un determinado color de pelota, se encontró que en 13 de 25 respuestas se proporcionó una medición correcta, en ocho respuestas se intenta medir la probabilidad y en cuatro casos no hay evidencia de respuesta. En este segundo trabajo experimental con eventos aleatorios, se observa un incremento en la obtención de respuestas correctas (8.3% en el primer experimento, 52% en el segundo) para el análisis de la probabilidad de ocurrencia de resultados, lo que presenta un avance en la observación y atención de los alumnos al efectuar el experimento y reflexionar en el espacio muestral. Este progreso sugiere un primer paso en la educación de las intuiciones primarias sobre el azar.

En lo relacionado con la exploración de expectativas de búsqueda de información, la mayoría de los alumnos indicaron el uso de internet para el acopio de sus datos sin mencionar otras opciones de obtención o generación propia de la información de su interés. Al pasar a la experiencia de recolección directa de información, se observó una reflexión y cuestionamiento acerca de la calidad de los datos en cuanto a la precisión en su lectura y registro durante el acopio y la presentación, así como la posibilidad de realizar mediciones directas o entrevistas para generar información propia. Este cambio de actitud marca la transición hacia una intuición más crítica, en línea con la alfabetización estadística.

El procesamiento de datos para la construcción del diagrama de dispersión y la recta de mejor ajuste utilizando tecnología permitió un análisis más ágil de información, inicialmente con GeoGebra y el cálculo del coeficiente de correlación utilizando Excel para complementar el análisis orientado a la toma de decisiones. La aplicación de estos programas permitió a los alumnos enfocar su atención en la lectura e interpretación de las tres herramientas de análisis para dar respuesta a las preguntas dadas en su hoja de trabajo. El uso de la tecnología permitió a los alumnos liberar recursos cognitivos y favorecer el trabajo en el nivel pensar despacio (Kahneman, 2021) para la interpretación.

En el cuestionario inicial, 40% de las respuestas se refirieron al uso de internet en la búsqueda de información para la toma de decisiones sin hacer referencia a cuestionar la confiabilidad de la información. En las respuestas al cuestionario final, ver Tabla 1, se observa un mayor interés por parte de los alumnos en torno a la obtención de datos y trabajo con gráficas (pregunta 4).

Tabla 1

Respuestas a los cuestionarios inicial y final del taller

Preguntas	Respuestas con el mayor porcentaje obtenido en el cuestionario			
	Cuestionario inicial	%	Cuestionario final	%
1. En tu opinión, ¿qué personas tienen mayor riesgo de sufrir un accidente automovilístico?	Mencionan factores de riesgo	52%	Los jóvenes	74%
2. Todos los clientes deberían pagar lo mismo por una póliza de seguros (asegurar su automóvil)?	Sí	44%	Sí	41%
3. ¿Qué aspectos crees que influyen en la ocurrencia de un accidente? ¿Cuál influye más en tu opinión?	Los distractores	28%	Consumo de sustancias tóxicas	48%
4. ¿Crees que puede hacerse un cálculo aproximado de la cantidad de accidentes que podría tener un conductor, por ejemplo, a lo largo de un año?	Sí (Contando los accidentes y aplicando encuestas)	28%	Sí (Obteniendo datos y uso de gráficas)	67%

Nota: Elaboración propia

A la pregunta de qué les puede ayudar a analizar su decisión bajo condiciones de incertidumbre, el 46% de las respuestas se refieren a la representación e interpretación de los datos y el 45% reconoce la utilidad del uso de herramientas de probabilidad y estadística así como la necesidad de razonar las decisiones. En cuanto a las herramientas que incorporarían para analizar datos y tomar una decisión en la situación hipotética, el 46% de las respuestas se refieren a la representación e interpretación de los datos y al uso de la línea de tendencia.

En cuanto al uso de los datos para obtener estimaciones, el 91% de las respuestas mencionan el uso del cálculo del coeficiente de correlación, construcción de tablas y gráficas, así como el análisis de la relación entre variables.

Conclusiones

De acuerdo con los objetivos planteados, los resultados del taller permiten establecer las siguientes conclusiones.

Respecto al objetivo de evaluar la secuencia pedagógica basada en la simplificación del modelo de correlación, se confirma que la progresión de actividades intuitivas -como la interpretación visual de diagramas de dispersión y el trazado manual de la línea de mejor ajuste- hacia la enseñanza del modelo de correlación, constituyó una estrategia pertinente para la enseñanza de conceptos estadísticos en secundaria. Sin embargo, la experiencia también muestra que los temas abordados fueron muy puntuales y es necesario incluir conceptos como el error, desviación media, desviación estándar y muestreo.

En relación con el segundo objetivo de desarrollar una intuición estadística, se observan cambios positivos en el pensamiento de los estudiantes. Partiendo de intuiciones primarias de carácter determinista, al final del taller manifestaron un mayor interés por fundamentar sus afirmaciones y decisiones mediante evidencias numéricas como el coeficiente de correlación y el uso de gráficas. Este resultado evidencia un acercamiento a las intuiciones secundarias a las que se aspira formar con la educación formal.

En cuanto al tercer objetivo, la experiencia permitió identificar con claridad los desafíos de la implementación. La enseñanza activa y centrada en el estudiante requiere una inversión de tiempo superior a la disponible en el marco habitual de una clase tradicional. La necesidad de un mayor tiempo para actividades prácticas, así como el diseño de materiales de trabajo que equilibren simplificación y rigor, que promuevan la discusión e integren la tecnología como apoyo, constituye una tarea compleja para los profesores, pero esencial. Estos hallazgos resaltan la importancia de considerar ajustes curriculares en la organización del tiempo escolar y en la priorización de espacios dedicados al análisis y la reflexión grupal.

A partir de esta experiencia, el taller confirmó la posibilidad y el valor de un enfoque de enseñanza que puede dialogar con las intuiciones de los estudiantes y orienta su tránsito hacia una mayor formalización y sentido crítico. Para que propuestas como esta puedan trascender al ámbito de un taller y enriquecer el currículo regular de matemáticas en la educación secundaria, es necesario solucionar los obstáculos prácticos identificados en esta experiencia de enseñanza.

Referencias

- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. En *Research on Teaching and Learning Probability. ICME-13 Topical Surveys* (pp. 1–33). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3>

- Boller, B. (2024). Teaching correlation and regression in three European countries. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 21(2), 161–183.
<https://doi.org/10.5485/tmcs.2023.13291>
- Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Harvard University Press.
- Büscher, C. (2022). Design principles for developing statistical literacy in middle schools. *Statistics Education Research Journal*, 21(1).
<https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.80>
- Chick, H. L., & Pierce, R. (2012). Teaching for statistical literacy: Utilising affordances in real-world data. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 339–362.
<https://doi.org/10.1007/s10763-011-9303-2>
- Cuevas, C., González, Ó., Real, C. R., & Rodríguez, A. (2014). *Matemáticas 3. Secundaria* (1a ed.). Ríos de Tinta.
- Elizarrarás, S. (2023). Enseñanza, medios y comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos en estudiantes de tercer grado de secundaria. En H. Cruz, B. Juárez, H. Reyes, F. Tajonar, V. Vázquez, & F. Velasco (Eds.), *Enseñanza de Probabilidad y Estadística* (1a ed., pp. 92–122). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Springer. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/0-306-47237-6>
- Fischbein, E., Bârbat, I., & Minzat, I. (1971). Intuitions primaires et intuitions secondaires. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 264–280.
- Franklin, C. A., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: a pre-K-12 curriculum framework*. American Statistical Association.
- Gigerenzer, G. (2023). *The intelligence of intuition*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/9781009304887>
- Kahneman, D. (2021). *Pensar rápido, pensar despacio* (16a ed.). Penguin Random House Grupo Editorial.
- Lind, D. A., Marchal, W. G., & Wathen, S. A. (2012). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. McGraw-Hill
- Osorio, E. A., Inzunza, S., & Ward, S. E. (2023). Modelación estadística para el aprendizaje de la correlación y regresión lineal. *PNA*, 17(3), 295–321.
<https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.23937>
- Secretaría de Educación Pública. (2024a). *Libro de texto gratuito. Saberes y pensamiento científico. Tercer grado de secundaria*. (1a ed.). SEP.
<https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S3SAA.htm?#page/1>

Secretaría de Educación Pública. (2024b). *Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Pensamiento estocástico* (1a ed.). Dirección General de Educación Superior para el Magisterio. Secretaría de Educación Pública. <https://bit.ly/3NUdYVK>

 Autor de correspondencia

María de Lourdes Santana Salinas | lourdes.santana@cinvestav.mx



Razonamiento geométrico en una tarea de isometrías

Geometric Reasoning in an Isometries Task

Ángel Colín  | angelenrique.sanchez@uca.es
Universidad de Cádiz, España

Rafael Ramírez  | rramirez@ugr.es
Universidad de Granada, España

Recepción: 17 de octubre de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

En este trabajo se analizan los niveles de Van Hiele que presentaron 14 estudiantes del máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, España. Durante el estudio se realizó una tarea con mosaicos geométricos creados mediante transformaciones de un elemento generador. La finalidad de esta tarea fue proporcionar a los participantes herramientas para el desarrollo de competencias matemáticas que se relacionan con la geometría, el dibujo y los elementos artísticos. Se utilizó una propuesta del modelo de Van Hiele aplicada exclusivamente a las isometrías planas. Los resultados mostraron que la tarea favoreció que tres sujetos manifestaran características propias del Nivel 4, asociadas con la categoría de visión global de las isometrías. El resto de los participantes manifestó características propias de los niveles 1, 2 y 3, que se asocian con el reconocimiento estático y dinámico de las figuras, con el descubrimiento experimental de nuevos elementos geométricos y con la deducción, definición y descomposición de las isometrías, respectivamente.

Palabras clave

formación de profesorado, razonamiento geométrico, isometrías, teselaciones

Abstract

This paper analyses the Van Hiele levels presented by 14 students of the Master degree research in Mathematics Education at University of Granada, Spain. During the study a task was carried out with geometric mosaics created by transformations of a generating element. The purpose of this task was to instruct the students providing them with tools for the development of mathematical competences related to geometry, drawing and artistic elements. A proposal of the Van Hiele model applied to planar isometries exclusively was used. The results shown that the task favoured that three students to manifest characteristics of level 4 associated with the category of global insight of isometries. The rest of participants manifested characteristics of levels 1, 2 and 3, which are associated with the static and dynamic recognition of figures, with the experimental discovery of new geometric elements and with deduction, definition and decomposition of isometries, respectively.

Keywords

Prospective teachers, geometric reasoning, isometries, tessellations

Introducción

Hace veinticinco años que en los principios y estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000) se establecieron programas de capacitación en todos los niveles educativos, que abarcan la visualización espacial, el razonamiento geométrico, la aplicación de transformaciones geométricas, el uso de simetrías y la modelización geométrica. Su finalidad es que los alumnos desarrollen autonomía propia para analizar situaciones matemáticas y resolver problemas de la vida real. Esto no solo debería quedar circunscrito a la educación básica obligatoria, sino que podría extenderse hacia los programas universitarios, incluso hasta los estudios de posgrado, especialmente en aquellos que están relacionados con la formación de futuros docentes o con la investigación en didáctica de las matemáticas. Para conseguirlo, es necesario proponer tareas que conduzcan al desarrollo y análisis de habilidades que proporcionan un mayor significado a los objetos geométricos en el estudiantado de nivel superior, enmarcadas en un modelo educativo orientado hacia las nuevas directrices curriculares actuales del sentido espacial.

Fernández (2013) ha resaltado la importancia de la relación que existe entre la visualización espacial y el aprendizaje de la geometría. En la visualización espacial, las figuras, formas e imágenes juegan un papel muy importante en los procesos para manipularlas en el plano o en el espacio, y en la habilidad para crearlas, imaginarlas y procesarlas. En términos generales, la visualización espacial puede ser considerada como un proceso de construcción de imágenes mentales o físicas, asociadas a conceptos u

objetos, con el fin de conducir a los sujetos hacia la comprensión de las matemáticas empleadas en su aprendizaje. Como un ejemplo, la rotación de imágenes mentales y su perspectiva, así como las transformaciones relacionadas con las simetrías, permiten crear conexiones entre la capacidad espacial y el pensamiento geométrico.

Diversos autores han demostrado que es posible despertar el interés en el aprendizaje mediante el uso y aplicación de recubrimientos en el plano, como ocurre al estudiar la obra gráfica del artista M. C. Escher, o al analizar los mosaicos geométricos decorativos que se encuentran en los palacios árabes de tipo islámico-nazaríes (Lyublinskaya & Cabral, 2023; Morales & Rubio, 2020; Mutlu, 2025). El enfoque didáctico que propusieron estos autores resulta pertinente para la formación de futuros docentes como a profesores que se encuentran en servicio y para enseñar los movimientos y transformaciones en el plano durante las prácticas educativas. Además, permite desarrollar las competencias matemáticas asociadas con la geometría y el conocimiento teórico, como pueden ser: los conceptos geométricos, crear conexiones matemáticas con elementos artísticos y despertar el interés en otras culturas. Para ello, se pueden diseñar tareas con potencial para indagar sobre el razonamiento geométrico que se espera obtener por parte de los docentes que se encuentra en etapa inicial de formación.

Las tareas como fundamentos para el aprendizaje pueden ser resueltas, transformadas y modificadas desde una perspectiva cognitiva, cultural o práctica, incluso pueden ser diseñadas con aspectos multidisciplinarios para contribuir al incremento de la motivación y el aprendizaje significativo al abordar aspectos científicos, artísticos y culturales. En este sentido, se consideró de interés caracterizar una tarea que fue aplicada durante un estudio piloto con 14 estudiantes del máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas que se imparte en la Universidad de Granada, España. La finalidad de esta tarea fue instruir al estudiantado proporcionándoles herramientas para el desarrollo de competencias matemáticas que se relacionan con la geometría, el dibujo y los elementos artísticos.

Marco teórico

El modelo de Van Hiele (1986) ha sido hasta ahora uno de los más estudiados en los programas de formación de profesorado y en la investigación en Didáctica de la Matemática. En este modelo se establece que el razonamiento geométrico de una persona puede incrementarse paulatinamente al superar cada uno de los cinco niveles de aprendizaje que lo constituyen, desde el Nivel 1 (visualización) hasta el Nivel 5 (rigor). El Nivel 5, en principio, solamente puede ser alcanzado por especialistas en

matemáticas. No obstante, estudios recientes han propuesto nuevas metodologías para que pueda ser alcanzado por quienes hayan superado el Nivel 4 (Arnal-Bailera & Manero, 2024).

El modelo de Van Hiele es aplicable en diversas prácticas educativas. En los últimos años se ha utilizado para conocer el razonamiento geométrico del profesorado en formación (Övez & Özdemir, 2024), para medir el conocimiento geométrico que necesitan sobre la enseñanza de las propiedades y características de las formas y figuras (Yi et al., 2022), para conocer su capacidad en las demostraciones geométricas (Arnal-Bailera & Manero, 2021), para entender y describir el concepto de similitud de las formas en el ámbito de la geometría Euclidiana (Mbatha & Bansilal, 2023) e, incluso, para aplicar métodos sofisticados que permiten conocer la respuesta cognitiva de un sujeto mediante el seguimiento ocular (Ghorbani et al., 2024). Sin embargo, no es un modelo que se haya utilizado específicamente en la geometría de las transformaciones, las cuales desempeñan un papel relevante en las habilidades que un sujeto necesita para formar imágenes mentales, transformarlas y manipularlas en su mente. Por ejemplo, con las simetrías rotatorias se pueden desarrollar habilidades de visualización y orientación espacial.

Para los propósitos de este estudio se utilizó una propuesta que permite aplicar el modelo de Van Hiele particularmente a las isometrías en el plano (Jaime & Gutiérrez, 1989). En dicha propuesta (traducida del documento original en inglés para facilitar la lectura e ilustrar este trabajo) se consideraron únicamente cuatro niveles, jerarquizados de la siguiente manera:

Nivel 1

- a) Identificación visual de traslaciones, rotaciones y simetrías estáticas
- b) Reconocimiento estático. Identificación de figuras isométricas
- c) Reconocimiento dinámico (movimiento realizado automáticamente)

Nivel 2

- a) Descubrimiento experimental de elementos /propiedades de isometrías

Nivel 3

- a) Deducción experimental de relaciones y propiedades de las isometrías
- b) Justificación de propiedades y relaciones ya conocidas
- c) Definición formal de traslación, rotación y simetría
- d) Descomposición de isometrías

Nivel 4

- a) Visión global de las isometrías planas
- b) Demostración formal de sus propiedades
- c) En la estructura grupal se toma en cuenta las relaciones existentes entre las isometrías que son generalizadas

Los autores de esta propuesta realizaron estudios con alumnado de educación primaria y con futuros maestros. Utilizaron diferentes figuras representativas y plantearon diversas actividades que conducen a la superación de cada uno de los cuatro niveles. Para superar el Nivel 4, por ejemplo, propusieron que se requiere un dominio en el concepto de estructura grupal de las isometrías, así como la comprensión y aplicación del teorema de clasificación de las isometrías planas, el cual establece que cada isometría es equivalente a un producto de tres o más isometrías, y el reconocimiento de movimientos equivalentes, descomposiciones y productos.

Metodología

En este estudio piloto, la metodología empleada para el análisis de los datos es de tipo exploratorio-cualitativo y de carácter descriptivo, ya que se especifican las características de los objetos analizados (Hernández & Mendoza, 2023). Se caracterizaron los niveles de Van Hiele en un grupo de 14 estudiantes del máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, España, que cursaban la asignatura Didáctica de la geometría. El grupo era heterogéneo, incluyendo profesorado en activo de primaria, secundaria y universidad, así como recientes egresados/as de los grados de Matemáticas y de Educación Primaria. El instrumento de análisis fue una tarea en la que se abordó la geometría de las transformaciones, centrada en las habilidades de un sujeto para desarrollar el pensamiento lógico y el sentido espacial. Las transformaciones o isometrías se refieren a los movimientos o cambios de posición en el plano de una forma o figura geométrica sin que se alteren sus propiedades, entre las más comunes se encuentran: traslación, rotación, reflexión y reflexión deslizada, las cuales se mostraron previamente a los estudiantes con el fin de homogeneizar los conocimientos necesarios para resolver las actividades de manera individual. La tarea estuvo compuesta de tres ejercicios que se describen a continuación:

Ejercicio 1. Se compone de dos actividades. a) Elaborar dos mosaicos distintos de 4×4 unidades partiendo de una tesela de 5×5 cm, como la que se indica en la Figura 1 a). Para elaborar los mosaicos se permitió aplicar las transformaciones que se consideraran necesarias. Si la actividad se hacía de manera manual debido a la falta de familiaridad con herramientas digitales, podían utilizar instrumentos geométricos y materiales artísticos. Si el trabajo se hacía de manera digital, se podía utilizar cualquier software de elección libre. La entrega de todos los trabajos fue en formato físico, en una cartulina tamaño A4 tanto para los digitales que fueron impresos como para los que fueron realizados manualmente. b) Entregar un escrito, en el que se

justificaran, con argumentos geométricos, las isometrías empleadas en sus diseños y las diferencias entre los dos mosaicos presentados. Estas actividades fueron concluidas fuera del aula, ya que los trabajos manuales requerían más tiempo del que podía proporcionarse en una sola clase.

Ejercicio 2. Consiste en señalar e identificar el elemento generador y los movimientos utilizados en tres mosaicos distintos, como se indica en la Figura 1 *b*). Los mosaicos podían ser intervenidos manualmente con rotuladores o bolígrafos. Para este ejercicio se dedicaron 30 minutos y fue realizado durante la clase.

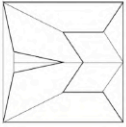
Ejercicio 3. Consiste en hacer un análisis geométrico de un mosaico y responder por escrito las cinco acciones establecidas, como identificar las figuras geométricas mediante una letra, identificar una isometría y resaltarla con un bolígrafo o rotulador, indicando las partes que la componen, describir sus propiedades, identificar varias isometrías en conjunto distintas a la anterior, y encontrar la tesela generadora del mosaico propuesto, como se indican en la Figura 1 *c*). Para este ejercicio se dedicaron dos horas y se realizó durante la clase.

Figura 1

Tarea diseñada para evaluar el razonamiento geométrico

a) Ejercicio 1. CONSTRUIR DOS MOSAICOS

Con esta tesela construir dos mosaicos distintos de 4 x 4 elementos. Dibujar cada mosaico en una cartulina tamaño A4. La tesela mide 5 x 5 cm. Puedes aplicar las transformaciones que más te convengan. Utilizar regla, compás, escuadra, cartabón. Uso de color (opcional). Puede ser: rotuladores, lápices de color, acuarelas, carboncillos, etc.



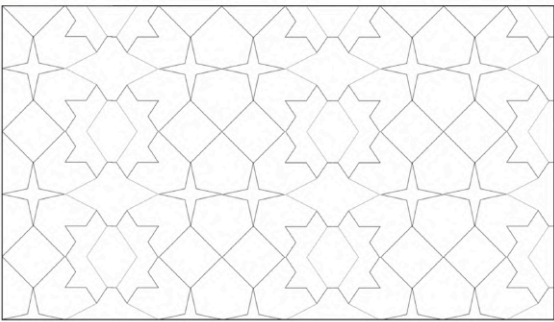
b) Ejercicio 2. IDENTIFICAR ELEMENTO GENERADOR

Identifica la tesela generadora y los movimientos con los que se obtienen los siguientes mosaicos. Justifica tu respuesta



c) Ejercicio 3. ANALIZAR MOSAICO

- 1) Identificar los hexágonos con una *H*, los rombos con *R*, los cuadrados con *C*, los polígonos cóncavos con *I*, los polígonos estrellados con *E*. Define cada uno de ellos.
- 2) Elige un elemento e identifica su transformación. Señala con un rotulador su centro de giro; su eje de simetría o sus puntos de traslación.
- 3) Describe las propiedades de esta transformación.
- 4) Identifica y señala otras transformaciones. ¿Qué relación tienen entre ellas?
- 5) Hallar el elemento generador (tesela) del mosaico. ¿cómo lo has conseguido? Explica.



En el análisis del primer ejercicio se tomaron en cuenta las capacidades de destrezas y la predisposición para comunicar resultados matemáticos por

escrito. En el segundo y tercer ejercicio, se consideró la capacidad de comprensión y análisis al responder a cada una de las acciones establecidas.

Las categorías que se establecieron en cada nivel de Van Hiele para analizar las respuestas de esta tarea se desglosan de la siguiente manera:

- C1a. Identificó el elemento generador y movimientos de teselas, centro de giro, vector, ejes...
- C1b. Señaló y definió las figuras geométricas, incluidos los polígonos y los polígonos estrellados.
- C1c. Señaló los movimientos de las teselas en los mosaicos.
- C2a. Construyó dos mosaicos distintos y comprendió las formas nuevas generadas y las propiedades.
- C3a. Dibujó/intentó con recortables para ubicar/señalar varios movimientos.
- C3b. Justificó las diferencias de los mosaicos con argumentos geométricos y matemáticos.
- C3c. Definió/explicó adecuadamente las isometrías señaladas con lenguaje técnico, no coloquial.
- C3d. Indicó las partes de la isometría (centro de giro, ángulo, ejes de simetría, vectores).
- C4a. Indicó distintas isometrías a la vez, con su centro de giro, ángulo, ejes de simetría, vectores.
- C4b. Demostró las distintas isometrías encontradas en mosaico.
- C4c. Describió las relaciones entre las distintas isometrías señaladas en el mosaico.

No se categorizó el Nivel 5 porque no se esperaban respuestas correspondientes a demostraciones formales. Las categorías C1a, C1b y C1c están asociadas con el Nivel 1, que es el reconocimiento de figuras estáticas y dinámicas. La categoría C2a, se asocia con el Nivel 2, que es el descubrimiento experimental de nuevas formas geométricas mediante la práctica manual o digital de las isometrías en el plano. Las categorías C3a, C3b, C3c y C3d están asociadas con el Nivel 3, en el que se exigen deducciones, definiciones y justificaciones de las propiedades de las isometrías, así como su descomposición para describir las partes que las constituyen. Por último, las categorías C4a, C4b y C4c se asocian con el Nivel 4, que corresponde a la visión global de las isometrías planas en conjunto y a la demostración formal de sus propiedades.

Resultados

En la Tabla 1 se muestra la manifestación de las categorías de cada sujeto considerando como unidad de análisis las respuestas completas de los tres ejercicios. La ubicación de las categorías está asociada con cada uno de los cuatro niveles de Van Hiele descritos en el marco teórico.

Tabla 1*Niveles de Van Hiele manifestado por los sujetos en cada categoría*

	N 1			N 2	N 3				N 4		
Sujeto	C1a	C1b	C1c	C2a	C3a	C3b	C3c	C3d	C4a	C4b	C4c
S1		o	o	o			o	o			
S2	o		o	o		o	o				
S3	o		o	o	o			o	o		
S4	o	o	o	o	o	o	o	o	o		
S5	o	o	o	o			o	o			
S6	o			o		o					
S7	o	o	o	o	o	o	o	o	o		
S8		o	o	o				o			
S9	o		o	o			o	o			
S10	o	o	o	o		o		o			
S11	o		o	o							
S12		o	o	o		o	o	o	o		
S13	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	
S14	o			o							

Para el Ejercicio 1, cada estudiante elaboró dos mosaicos. Se presentó un total de 28 diseños, de los cuales 16 se realizaron con software libre y 12 se hicieron de forma manual. De los 28 diseños, 21 fueron coloreados y 7 presentaron únicamente las líneas de trazo, lo cual no resta valor a la destreza puesta en juego. Se observó que dos mosaicos entregados fueron contruidos con base en teselas recortadas en papel; esto permitió que se convirtieran en un material manipulativo. En la Figura 2 a) se muestran tres mosaicos realizados digitalmente y tres mosaicos realizados de forma manual. En ambos casos se observan diferentes movimientos y nuevas formas geométricas que fueron creadas con un mismo elemento generador.

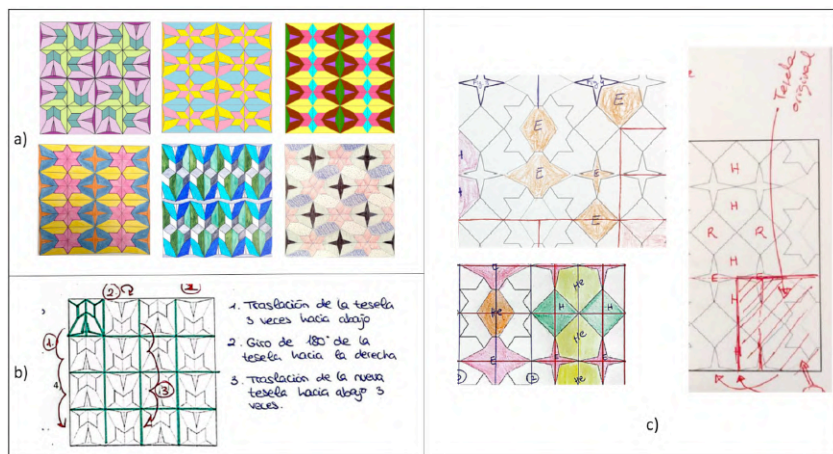
En la fase de análisis, todos los sujetos experimentaron las isometrías y el descubrimiento de nuevos elementos interfigurales como resultado de la elaboración de dos mosaicos. Esto se ve reflejado en la columna de la categoría C2a, lo que indica que todos superaron el Nivel 2. Se observó que únicamente cuatro sujetos utilizaron recortables o dibujos para identificar los movimientos (C3a) y que siete sujetos manifestaron dificultades para definir y justificar los conceptos y propiedades que diferencian las

isometrías (C3b). Esto puede deberse a que no redactaron adecuadamente la explicación que corresponde a las definiciones de traslación, rotación y simetrías. También fue notorio que seis sujetos utilizaron un lenguaje demasiado coloquial en su forma de expresar las definiciones, como se ve reflejado en la columna C3c.

En el Ejercicio 2 se observó que, al identificar visualmente las transformaciones, once de los sujetos proporcionaron respuestas señalando el movimiento y los ángulos de giro como se aprecia en la columna C1a. Por su parte, tres de ellos proporcionaron respuestas sin hacer ninguna anotación y solo tres mostraron dificultad para visualizarlas. El reconocimiento de los movimientos (movimiento dinámico) fue conseguido por doce sujetos, de los cuales solo dos explicaron el concepto de vectores y movimientos (C1c). En la Figura 2 b) se muestra un ejemplo de las respuestas proporcionadas.

En el Ejercicio 3 se observó que seis sujetos tuvieron dificultades para identificar visualmente los elementos geométricos en el mosaico, por ejemplo, confundieron un rombo con un cuadrado, un cuadrado con un hexágono, o un polígono estrellado con un hexágono (C1b). También se observó que estos seis sujetos tuvieron dificultad para definir un polígono estrellado. En cuanto a la identificación visual de transformaciones y movimientos, sólo tres sujetos tuvieron dificultad para ubicar el centro de giro, los ejes de simetría o los puntos de traslación (C1a). Las propiedades de las transformaciones pudieron definirlas de manera adecuada ocho sujetos, el resto no respondió o lo hizo de manera incorrecta (C3c). La mayoría logró identificar el elemento generador, pero cuatro sujetos no pudieron hacerlo (C3d). La visión global de las isometrías en el plano fue manifestada por cinco sujetos (C4a), pero solamente uno de ellos entregó su escrito con demostraciones formales (C4b).

Por último, ninguno de estos cinco sujetos respondió adecuadamente a la descripción de las relaciones entre las isometrías que ellos mismos señalaron (C4c). Esto puede deberse a que requerían mayor tiempo para redactar sus respuestas, a que no respondieron adecuadamente o a que simplemente la dejaron sin responder. En la Figura 2 c) se muestran varios ejemplos de los errores que se identificaron, por ejemplo, nombrar los cuadrados con la H de hexágono o al polígono de seis lados identificarlo con la E de polígono estrellado, incluso, identificar un cuadrado con la E de polígono estrellado y a la vez con la R de rombo. También se observaron dificultades en la identificación del elemento generador o tesela generadora del mosaico. Esta identificación habría sido más accesible si se hubieran trazado varias retículas sobre el mosaico hasta visualizar la mínima composición de los elementos geométricos.

Figura 2*Ejemplos de respuestas a los ejercicios de la tarea*

Conclusiones

En este estudio piloto se resalta la importancia de la visualización espacial en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, principalmente en lo que respecta a la representación y transformación de objetos en el plano y la comunicación escrita de resultados matemáticos. Además, se aborda una práctica educativa mediante el diseño de una tarea que posibilite el desarrollo de habilidades de visualización de manera eficaz. Los errores encontrados no estaban considerados para ser analizados, sin embargo, resultaron útiles para el planteamiento de nuevas acciones en futuras tareas y en la planificación de la docencia, por ejemplo, otorgar mayor atención a la geometría de las transformaciones y a la descripción de las relaciones interfigurales, ya que son necesarias para la manifestación de los dos primeros niveles de Van Hiele, que se asocian con la visualización y el análisis de los objetos geométricos con los que se está trabajando. Esto contribuiría al desarrollo de habilidades de visualización para identificar, reconocer y comparar sus diferencias, semejanzas, analogías y describir sus propiedades intrínsecas.

La tarea que se realizó en este estudio favoreció que tres sujetos superaran por completo todas las categorías de los tres primeros niveles y que manifestaran algunas características propias del Nivel 4, que están relacionadas con la categoría de visión global de las isometrías planas. Se considera que estos tres sujetos se encuentran en transición del Nivel 4 al Nivel 5; es posible que correspondan a profesores de matemáticas en servicio o los estudiantes que recientemente concluyeron la carrera de matemáticas. Su formación les permitiría atender el rigor matemático

exigido por este Nivel 5, en el que se requiere una comprensión profunda de teoremas y axiomas, así como el dominio de diferentes geometrías. El resto del grupo, al ser heterogéneo, con estudiantes recién egresados de la carrera de magisterio, de ingeniería y de ciencias sociales, solamente manifestó características propias de los Niveles 1, 2 y 3, que se relacionan con las diferentes categorías que componen la propuesta del modelo de Van Hiele aplicado a isometrías (Jaime & Gutiérrez, 1989).

Los resultados obtenidos en este estudio son consistentes con los encontrados por Arnal-Bailera y Manero (2021) en uno de sus trabajos realizados con estudiantes de posgrado. Por ello, se considera necesario que en los programas de formación de profesorado y de futuros investigadores e investigadoras en Didáctica de las Matemáticas se propongan nuevas tareas y actividades educativas que contribuyan a la manifestación de los sujetos en el Nivel 4, como lo sugirieron Pandiscio y Knight (2010). Las categorías que se establecieron en este estudio no solo revelaron las habilidades y destrezas de los sujetos en cuestión, sino que también permitieron identificar errores y dificultades que se presentaron durante las acciones implementadas en esta tarea.

El hecho de que los sujetos manifestaran características de algunas categorías asociadas a un determinado nivel, pero no de otro, sugiere que la caracterización de los niveles de Van Hiele en un sujeto está estrechamente relacionada con el tipo de la tarea propuesta y con las habilidades y destrezas que presenta cada sujeto. Los hallazgos de este estudio constituyen un punto de partida para futuras investigaciones en el que se tiene contemplado la comparación de los niveles de van Hiele con otros referentes teóricos, como podrían ser los componentes del sentido espacial, en particular, el componente correspondiente a la visualización.

Una limitación que presenta este estudio es el tamaño de la muestra analizada, al no ser suficientemente numerosa, no es posible generalizar los resultados obtenidos. Además, no se realizó un estudio previo de los niveles de Van Hiele antes de pasar a las teselaciones debido a la corta duración prevista para esta tarea durante el curso. No obstante, las categorías que se establecieron para analizar la tarea no sólo revelaron las habilidades y destrezas de los sujetos, sino que también permitieron identificar errores y dificultades que podría dar lugar a la generación de conocimientos posteriores.

En las implicaciones para la enseñanza, la elaboración manual o digital de los mosaicos contribuyó al desarrollo de competencias procedimentales y al fortalecimiento de las habilidades de visualización mediante movimientos y transformaciones en el plano. Sin embargo, la falta de dominio de instrumentos geométricos físicos dio lugar a retrasos y dificultades de

precisión al elaborar los diseños. El uso de software de geometría dinámica como GeoGebra habría permitido atenuar esas dificultades. Esta tarea permitió establecer conexiones matemáticas con elementos artísticos que incentivaron su creatividad y comprensión de las ideas y los procesos matemáticos de las isometrías. La elaboración de nuevas propuestas para el diseño y la creación de teselados geométricos abre una línea de análisis para futuros estudios.

Referencias

- Arnal-Bailera, A., & Manero, V. (2024). A characterization of Van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the Delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 537–560. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z>
- Arnal-Bailera, A., & Manero, V. (2021). La demostración en matemáticas. Perfiles de profesores en formación según sus niveles de Van Hiele. En P. D., Diago, D. F., Yáñez, M. T., González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 149–156). SEIEM.
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19–42). SEIEM.
- Ghorbani, M., Izadi, F. S., Roshan, S. S., & Ebrahimpour, R. (2024). Assessing prospective teacher's geometric transformations thinking: A Van Hiele theory-based analysis with eye tracking cognitive science method. *Technology of Education Journal*, 18(1), 67–88.
- Hernández, S. R., & Mendoza, T. Ch. P. (2023). *Metodología de la investigación, las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta* (2ª ed.). McGraw-Hill.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele model. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131–138). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Lyublinkaya, I., & Cabral, M. (2023). Effect of GeoGebra explorations combined with art-based practices on in-service teachers' understanding of geometric transformations. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1–9). European Society for Research in Mathematics Education.
- Mbatha, M., & Bansilal, S. (2023). Using the Van Hiele theory to explain pre-service teachers' understanding of similarity in Euclidean geometry. *Education Sciences*, 13(9), 861. <https://doi.org/10.3390/educsci13090861>

- Morales, R. G., & Rubio, G. N. (2020). Una experiencia con teselados usando GeoGebra. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (90), 65–71.
- Mutlu, Y. (2025). Prospective elementary mathematics teachers' view on the use of Islamic geometric patterns in mathematics lessons. *Journal of STEM Teacher Institutes*, 5(1), 13–20.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. NTCM.
- Övez, F. T. D., & Özdemir, M. (2024). An examination of pre-service teachers' Van Hiele levels of geometric thinking and proof perception types in terms of thinking processes. *Educational Research and Reviews*, 19(1), 26–39.
- Pandiscio, E. A., & Knight, K. C. (2010). An investigation into the Van Hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. *Journal of Research in Education*, 20(1), 45–53.
- Van Hiele, H.P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Yi, M., Wang, J., Flores, R., & Lee, J. (2022). Measuring pre-service elementary teachers' geometry knowledge for teaching 2-dimensional shapes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(8), Artículo em2137. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12220>

 Autor de correspondencia

Ángel Colín | angelenrique.sanchez@uca.es



La función del Cuerpo en la comprensión del número. La experiencia de un estudiante con discapacidad intelectual en un aula inclusiva

The Role of the Body in Number Understanding: The Experience of a Student with Intellectual Disability in an Inclusive Classroom

Elizabeth Rosales González  | elizabeth.rosalesg@cinvestav.mx
Cinvestav

Ricardo Quintero Zazueta  | quintero@cinvestav.mx
Cinvestav

Recepción: 26 de agosto de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

Este artículo, basado en una investigación cualitativa, analiza el proceso de aprendizaje de conceptos teóricos de la aritmética básica en un estudiante con discapacidad intelectual que cursa el primer grado en una escuela primaria inclusiva. Su forma de abordar las ideas matemáticas se manifiesta a través de la secuencia de aprendizaje de una propuesta pedagógica diseñada conforme a la Teoría de la Formación Planificada de las Acciones Mentales o Teoría de la Actividad de Galperin. El pensamiento numérico del estudiante no se reduce a verbalizar un determinado conjunto de palabras o emular las acciones del docente, su comprensión implica formas específicas de manifestación donde el movimiento corporal se hace presente para conducir al estudiante a la transformación de sus procesos mentales, y favorecen el reconocimiento de relaciones numéricas que posteriormente den lugar a aspectos simbólicos. Los hechos registrados muestran un entendimiento mutuo de las acciones y unificación de significados por parte del estudiante y sus compañeros, quienes comparten las tareas en el salón de clase.

Palabras clave

Discapacidad intelectual, conteo, movimiento corporal, Teoría de la Actividad

Abstract

This article, grounded in qualitative research, analyzes the process of learning theoretical concepts of basic arithmetic in a student with intellectual disability enrolled in first grade at an inclusive primary school. The student's approach to mathematical ideas is manifested through the learning sequence of a pedagogical proposal designed in accordance with the Theory of the Planned Formation of Mental Actions, also known as Galperin's Activity Theory. The student's numerical thinking is not limited to verbalizing a given set of words or imitating the teacher's actions; rather, understanding involves specific forms of expression in which bodily movement becomes central in guiding the student toward the transformation of mental processes and in supporting the recognition of numerical relationships that later give rise to symbolic aspects. The recorded evidence shows mutual understanding of actions and a unification of meanings among the student and peers, who share tasks within the classroom.

Keywords

Intellectual disability, counting, bodily movement, Activity Theory

Introducción

La discapacidad intelectual plantea desafíos en los procesos educativos debido a su incorporación a una compleja gama de características de la población y a sus necesidades de inclusión en la sociedad (Schluchter et al., 2023). Los estudiantes con frecuencia enfrentan situaciones que vulneran su condición y reducen significativamente sus oportunidades de desarrollo. A pesar de estas circunstancias, la educación se sigue considerando un proceso apropiado para ayudarlos a superar sus desventajas. Un proceso de inclusión educativa, se finca en la aceptación y apoyo de la diversidad de características entre la población estudiantil; fomenta prácticas colaborativas y aprovecha las condiciones del entorno para profundizar en la adquisición de conocimiento (Ainscow, 2025).

En este sentido, la psicología de Galperin propone un enfoque sistemático para la formación de nuevas capacidades mentales que pueden aplicarse en el aprendizaje matemático de estudiantes con discapacidad intelectual ubicados en aulas regulares. Aunque su versión original se desarrolló hace mucho tiempo, actualmente se están considerando algunos de estos elementos desde otras perspectivas teóricas, como la cognición 4E (*embodied, embedded, enactive, and extended*), que relaciona el aprendizaje numérico con la cognición enraizada en el cuerpo y sugiere que la conjunción de la mente, el cuerpo y el entorno físico y social, juegan un importante rol en la cognición y no se limita a aspectos representacionales (Gallagher, 2023). Otros autores (Lakoff & Núñez, 2000), argumentan la

formación de conceptos matemáticos, como el número, originados por medio de metáforas conceptuales procedentes de experiencias físicas y sensoriales, donde la interacción entre el cuerpo, la mente y el entorno inciden en el desarrollo del pensamiento matemático. Schilhab & Groth (2024), aportan evidencias específicas en el aprendizaje de habilidades de lectoescritura, fundamentadas en la participación y situada dentro de un ámbito social y material. Desde este marco, la formación de palabras y conceptos se origina en la relación mutua entre el ser humano, el contexto y las experiencias espaciotemporales, señalando el enraizamiento del pensamiento abstracto a través de los sentidos. Desde un enfoque multimodal, se hace referencia a diferentes formas semióticas: verbalización, gesticulación, corporeidad, producción gráfica y uso de objetos, para dar significado al número. Las investigaciones destacan la interrelación de aspectos individuales, sociales y semióticos para el desarrollo numérico en los niños (Salsa & Rodríguez, 2022).

Los procesos cognitivos que tienen lugar en cualquier espacio educativo son complejos, sin embargo, analizar las formas en que las ideas y el aprendizaje numérico se manifiestan en esta población de estudiantes, dentro de un aula inclusiva, contribuirá a tener una mayor comprensión de los caminos que siguen para asimilar los conceptos matemáticos y mejorar su rendimiento (Schnepel et al., 2020).

Marco teórico

Enfoque sociocultural

La Teoría de la Formación Planificada de las Acciones Mentales o Teoría de la Actividad de Galperin, constituye un marco para estudiar las funciones mentales, socialmente construidas, sin perder de vista la singularidad del individuo, en el proceso de adquisición de conceptos teóricos dentro de la actividad conjunta (Solovieva, 2020). Su elección, incide en las posibles respuestas a cuestionamientos sobre el desarrollo cognitivo de personas con discapacidad intelectual y sus aportes en la educación inclusiva. Desde esta perspectiva, se pretende identificar elementos relevantes para el aprendizaje de los estudiantes cuando manifiestan problemas de lenguaje y no han desarrollado las habilidades de lectoescritura.

Actividad orientadora

La unidad básica en este enfoque es la actividad, un concepto que representa la integración de aspectos sociales e individuales, internos y externos del ser humano. La actividad, concebida como una estructura interna, requiere formarse, ejecutarse frente a variantes de una situación y

experimentar cambios, hasta consolidarse. (Arievitch, 2017). La unidad de análisis es la acción, que conserva todas las propiedades de la actividad (Solovieva & Quintanar, 2020). Cuando el agente, una persona con voluntad y conciencia, enfrenta situaciones que emergen en su entorno, la actividad lo orienta para reconocer las nuevas condiciones y posibles acciones que pueden ejecutarse, así como su relevancia en la toma de decisiones (Arievitch, 2017).

Etapas operativas de la actividad

Se caracteriza por adquirir información acerca de las condiciones para realizar una acción y dar paso a la capacidad del agente para llevarla a cabo, reconociendo el propio método desarrollado. Está conformada por la base orientadora y las fases funcionales de la acción. Cada una de estas componentes tiene el propósito de contribuir a la formación de una estructura interna que guíe al agente en la identificación de características significativas para actuar y le posibilite la construcción de nuevas acciones con propiedades específicas. (Engeness, 2021).

La base orientadora es el conjunto de elementos, dispuestos para guiar al estudiante en la realización de una acción. Desempeña un papel decisivo porque puede dar paso a la cognición, mediante la supervisión y el control, al establecer condiciones específicas que conduzcan, sistemáticamente, a resultados planificados. Incluye un panorama de la situación, la exploración de sus elementos y la ejecución paulatina de la acción; permite verificar, y si es necesario, corregir el proceso que se está efectuando (Solovieva & Quintanar, 2020). Sirve para concretar una serie de indicaciones y queda de manifiesto cuando el estudiante lleva a cabo la acción (Engeness, 2021).

Las fases funcionales representan un sistema organizado para ejecutar una nueva acción (Arievitch, 2017), y cada una de ellas tiene una función específica en la transformación de fenómenos complejos de la realidad del agente en objetos abstractos. Las fases se entienden como diferentes estadios por los que transita la actividad cognoscitiva, del exterior al interior del agente, y son, la acción material/materializada, la acción en el discurso abierto, la acción en el discurso encubierto y la acción mental (Arievitch, 2017).

En la primera fase, el agente interactúa con objetos materiales/materializados tales como modelos, gráficos o dibujos, para familiarizarse con nuevos conceptos a través de sus sentidos, mediante acciones como tocar, mover, marcar, verbalizar, etc. De esta manera se puede desplegar por completo la acción, manifestando todas sus condiciones esenciales, favoreciendo la identificación de propiedades y generación de significados de lo realizado, de acuerdo con el ritmo establecido por el propio agente

(Engeness, 2021). Esta forma concreta otorga la posibilidad de mostrar elementos, relaciones y carácter secuencial, y constituye el primer paso para la apropiación práctica del contenido que después se manifieste en una acción mental.

En la fase del discurso abierto, las palabras tienen una función simbólica al sustituir a los objetos, al convertirse en entidades abstractas. Las ideas comunicadas a través del lenguaje hablado, manifiestan a los demás la organización interna y, al completar verbalmente la acción, el lenguaje funge como mediador del agente con su entorno, y establece una comunicación social del pensamiento en la que se interrelacionan los planos externo e interno, y se da paso a la generalización (Engeness, 2021). El lenguaje hablado orienta, tanto la ejecución como la exposición de relaciones en la acción, y al emplear términos con el mismo significado para todos, se manifiesta como un conocimiento compartido dentro del grupo.

En la tercera fase, se visualizan relaciones y establecen significados mediante un discurso silencioso o habla intrasubjetiva, creando una imagen de la estructura del objeto con mayor estabilidad y arraigo que la proporcionada por objetos materiales. Mediante este discurso, el agente recurre a símbolos con significado para sí mismo y manifiesta su labor reflexiva al ejecutar una acción, al considerar sus elementos y no sólo actuando mecánicamente (Solovieva & Quintanar, 2020). El habla intrasubjetiva es una función esencial para consolidar la transición entre la acción externa o material y la acción interna o mental.

La acción mental orienta y regula el desempeño individual. Es la misma acción real y externa que primero fue ejecutada con objetos materiales y ahora se encuentra en un nivel superior de abstracción (Engeness, 2021). En esta fase, todas las partes se integran y ejecutan, sin habla manifiesta o apoyo externo. La acción se automatiza, evoca ideas a través de estructuras y procesos internos, inaccesibles a la observación. Es una sucesión organizada de imágenes y significados a disposición del agente, para su empleo cuando las condiciones lo ameriten (Arievitch, 2017), sin embargo, sigue siendo producto de la interacción del ser humano con su entorno, dirigida a solventar situaciones reales.

Para el análisis de resultados se utilizan los mismos componentes de la actividad, en tanto se consideran elementos clave en la estructuración de la propuesta pedagógica para la formación de bases aritméticas.

Método de investigación

Tipo de estudio

La estructura corresponde a las características de la investigación cualitativa, entendida como una actividad sistemática orientada a la comprensión de

prácticas socioculturales en un escenario educativo (Tarrillo et al., 2024). Se aborda a través de un estudio de caso con el propósito de describir y analizar el proceso de formación de conceptos teóricos aritméticos mediante una secuencia gradual de acciones planificadas que permiten profundizar en las experiencias de aprendizaje y significados surgidos en el grupo social dentro del aula.

Contexto escolar

El estudio se realizó en una escuela primaria oficial de tiempo completo, ubicada en la Ciudad de México, la cual brinda atención a niños en edades de entre 6 a 12 años. Su población está distribuida en doce grupos que cursan las asignaturas regulares y participan en talleres, actividades culturales y deportivas. Cuando se identifica algún tipo de discapacidad entre la comunidad estudiantil, las autoridades del plantel buscan asesoría externa y, si lo consideran necesario, canalizan al estudiante a instituciones médicas especializadas. También ofrecen apoyo institucional pedagógico y de orientación a la familia y fomentan entornos de colaboración y empatía hacia los compañeros mediante charlas con psicólogos.

En el grupo de primer grado están inscritos veintiséis niños en edades de seis y siete años. En el aula, se sientan por pares, usan el libro de texto, cuaderno de trabajo, hojas con ejercicios adicionales y materiales como fichas, tapas, estampas e ilustraciones. Aquellos que manifiestan problemas de aprendizaje reciben una hora de asesoría semanal por parte de la Unidad de Educación Especial y Educación Inclusiva (UDEEI), en el mismo salón de clase.

Agente participante

Estudiante de siete años, nueve meses, sin antecedentes de educación preescolar, ni registro de apoyo académico externo en alguna institución o, por parte de su familia. El desarrollo de sus habilidades de lenguaje incluye la pronunciación de palabras sueltas y frases cortas, así como la repetición de la serie numérica hasta el cinco con el apoyo de las maestras. En la escritura, realiza algunos trazos, sin llegar a dibujar autónomamente letras ni grafías numéricas; no evidencia desarrollo de las habilidades lectoras. Está aprendiendo a sujetar el lápiz, a recortar y a dar nombre a elementos de su entorno.

Las tareas asignadas las realiza en su cuaderno o en un pizarrón pequeño colocado en su mesa de trabajo. Para mejorar su avance, recibe una hora diaria de asesoría por parte de la UDEEI. Participa en actividades culturales y deportivas, acompañado de alguno de sus padres, cuando así lo consideran necesario.

Las autoridades escolares propusieron a este estudiante por su rezago académico y por considerar su caso como prioridad en la atención a su discapacidad. Su participación en la investigación se realiza con base en el consentimiento informado de sus padres, la manifestación de respeto por su dignidad y autonomía y, el manejo confidencial de su información personal.

Técnicas e instrumentos de recolección y registro de datos

En el proceso de recopilación de datos se emplearon técnicas e instrumentos como la entrevista, la observación y el diario de campo, con reconocimiento de que, en el aula, las observaciones y registros de los hechos son de utilidad para explorar el contexto y los significados (Tarrillo et al., 2024).

Las entrevistas semiestructuradas con el personal docente y directivo, otorgaron la oportunidad de conocer acerca del programa de estudios, las adaptaciones a los temas, los desafíos en la enseñanza, así como experiencias, logros y expectativas. La observación llevada a cabo, participante y no participante, permitió recabar información en torno a las actividades escolares cotidianas, organización, los materiales y las estrategias empleadas en el salón de clase. En el diario de campo se asentaron preguntas y reflexiones, comentarios de las maestras y de los demás estudiantes surgidos en las sesiones de trabajo, así como detalles de la participación del estudiante: conducta, expresión corporal, palabras, gestos y momentos de interacción con sus compañeros durante la ejecución de tareas. Los datos recabados quedaron registrados en grabaciones de audio, video, fotografías y registros escritos.

La propuesta pedagógica

La planificación de tareas, apegada a la secuencia de fases funcionales, como se menciona en el marco teórico, se llevó a cabo en cinco sesiones. El proceso completo se especifica en Tabla 1. Su configuración incluye:

- i. La extensión de los dedos de una y de ambas manos
- ii. Verbalización de series numéricas
- iii. Conteo de juguetes, piezas de plástico, miembros del grupo y dibujos
- iv. Visualización de graffias numéricas impresas
- v. Escritura de graffias numéricas

Resultados y análisis

El análisis se realiza con base en el manejo y significación de elementos materiales, verbales y gráficos, a partir del papel desempeñado por el estudiante y la influencia del entorno en la adquisición y transformación de ideas numéricas a lo largo del tránsito por cada una de las fases funcionales.

También se destaca el despliegue de sus propias herramientas, como el movimiento corporal, para el dominio de componentes esenciales y establecimiento de relaciones numéricas en las series numéricas y el conteo.

Tabla 1

Diseño y procedimiento de tareas en las fases funcionales

FASES	TAREAS	DESARROLLO
<i>Formación de la base orientadora de la acción</i>	1. Verbalizar la serie numérica del uno al diez. 2. Escuchar y repetir una melodía de conteo del uno al diez, extendiendo los dedos de acuerdo con las cantidades que son mencionadas.	El estudiante observa y da seguimiento a las acciones mostradas por la maestra en varias ocasiones, al extender los dedos y mencionar simultáneamente la secuencia numérica.
<i>Acción material/materializada</i>	3. Verbalizar series numéricas del uno al diez, acompañadas del uso de los dedos de ambas manos. 4. Contar diversos objetos materiales hasta el diez, junto con el empleo de los dedos; observar grafía escrita y verbalizar el nombre correspondiente.	La maestra muestra una secuencia de acciones al verbalizar y extender los dedos en un orden establecido. Después, solicita la participación de todo el grupo y, por último, promueve la participación individual del estudiante.
<i>Acción en el discurso abierto</i>	5. Verbalizar la serie numérica del uno al veinte. 6. Contar a los integrantes del grupo.	La maestra, a través de la ejemplificación, preguntas e indicaciones, guía la expresión verbal de ideas y la secuencia de acciones para obtener el número cardinal.
<i>Fase de la acción en el discurso encubierto</i>	7. Contar del uno al diez con los dedos. 8. Contar del uno al diez con piezas de plástico.	Se da seguimiento al dominio manifestado por el estudiante en las series numéricas y el conteo aplicado a conjuntos. La maestra corrige y ofrece retroalimentación del proceso.
<i>Acción mental/ideal</i>	9. Contar los elementos de conjuntos formados con objetos materiales de diferentes cardinalidades, hasta el diez. 10. Contar objetos materializados (dibujos) con diferentes cardinalidades, hasta el diez, y escribir la grafía numérica correspondiente.	Se registra el establecimiento de relaciones numéricas entre los constituyentes de diferentes conjuntos y el manejo de elementos semióticos, como nombres y grafías numéricas sin apoyo de ningún tipo.

Conteo hasta el diez con los dedos extendidos

En la tarea 2, se da la indicación de realizar el conteo con los dedos, hasta el diez, mientras los estudiantes repiten una melodía numérica. La primera vez el estudiante lo intenta, pero de inmediato cambia. Levanta un brazo y lo balancea, en sintonía con las palabras numéricas que escucha. En la tercera repetición, comienza de la misma manera, pero antes de finalizar, se detiene y pregunta a la maestra, ¿cinco?, ¿cuatro?, mientras extiende, consecutivamente, cuatro y cinco dedos.

El desempeño del estudiante muestra el movimiento corporal como parte de la base orientadora de la acción que está construyendo para abordar aspectos aritméticos. Aunque primero realiza la tarea bajo su propio

esquema, recibe la influencia del entorno, de sus compañeros y de la maestra. La observación de lo que acontece alrededor le posibilita expresar sus ideas numéricas de diferentes formas: a través del movimiento de los brazos, con la extensión de los dedos y mediante el lenguaje hablado. El movimiento del brazo le permite iniciar y seguir la secuencia de palabras y mantener el incremento unitario y constante del conteo, es decir, establecer una correspondencia biunívoca. Con el movimiento corporal accede y despliega los componentes del conteo, a partir de los cuales emerge el significado de las palabras numéricas que está repitiendo (Gandell, 2025), pero su actividad no se detiene en ese plano individualizado. Observa lo que acontece a su alrededor, su esfera social y, a semejanza de lo que hacen sus compañeros, usa el lenguaje hablado y los dedos como herramientas para indicar cantidades, no como una repetición mecánica, sino como una acción consciente de lo que dice y hace, manifestando la formación de ideas numéricas dentro de su entorno social.

Tabla 2

Aspectos relevantes en cada fase para la formación de bases aritméticas

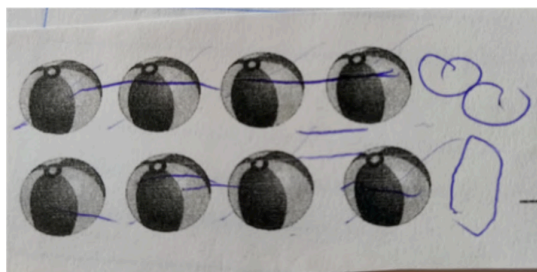
Fases	Resultados y análisis
Base orientadora de la acción	<i>Repite verbalmente y con el balanceo de su cuerpo, brazos, tronco, cabeza, etc., la secuencia de palabras numéricas.</i> <i>Plantea preguntas en torno a cantidades formadas con los dedos.</i> El estudiante exhibe la formación de un esquema propio para dar seguimiento a una secuencia de palabras, de acuerdo con el modelo mostrado. Coordina la verbalización de nombres numéricos y el balanceo corporal al establecer la correspondencia uno a uno. El movimiento corporal, le permite el empleo de otras herramientas semióticas como los dedos, objetos materiales y materializados (dibujos). La sustitución inicial de la extensión de los dedos por el balanceo corporal, funciona como un elemento externo y visible, para él y para los demás, que mantiene el significado de los principios y relaciones numéricas que está aprendiendo. El lenguaje hablado, aun con sus limitaciones, es un portavoz de su subjetividad y le sirve para manifestar la generación de ideas numéricas.
Acción material/materializada	<i>Aplica el conteo a conjuntos con cardinalidad hasta el diez.</i> <i>Emplea los dedos como herramienta semiótica, para representar cantidades específicas.</i> El movimiento ininterrumpido y rítmico de su cuerpo delinea la secuencia uniforme y continua de la serie numérica, y permite tomar sentido del incremento, manifestar la relación uno a uno y señalar el tamaño de un conjunto, la cardinalidad; elementos esenciales en el conteo. Además, su base orientadora de la acción, con el balanceo corporal como uno de sus componentes, le da autonomía en su desempeño y constituye un recurso viable para abordar las tareas junto a sus compañeros. El empleo de los dedos para contar, hace posible externalizar la correspondencia uno a uno con el objeto material y con los nombres numéricos, percibir en forma inmediata la cantidad y compartir a los demás su significado. El balanceo corporal y el uso de los dedos, forman un puente, fincado en experiencias sensorio-motoras, que lo encaminan a un mayor dominio en los principios del conteo (Kirchhoff, 2018).

Tabla 2 (continúa)*Aspectos relevantes en cada fase para la formación de bases aritméticas*

Fases	Resultados y análisis
Acción en el discurso abierto	<i>Con sus compañeros, repite la serie numérica hasta el veinte; todos balanceando el tronco y los brazos simultáneamente. Menciona algunos de los vocablos sin apoyo de ningún tipo.</i> <i>En forma individual, realiza el conteo de elementos de un conjunto material con cardinalidad igual a diez.</i> El movimiento corporal representa, por un lado, una herramienta con implicaciones cognitivas para asimilar significados numéricos a partir de sus propias experiencias, y, por otro, un medio de comunicación con su entorno (Salsa & Rodríguez, 2022). Mediante este recurso, el estudiante participa y toma conciencia de las características de la situación numérica donde se encuentra inmerso y, simultáneamente, proyecta el significado de lo que realiza. Su forma de llevar a cabo la tarea representa una acción intersubjetiva que mantiene un flujo constante de ideas y de comunicación con sus compañeros en diferentes momentos de su proceso de aprendizaje. Es un procedimiento concreto para cuantificar la acción y establecer relaciones numéricas. Como parte de su base orientadora de la acción resulta decisivo en la adquisición de nuevos vocablos numéricos y en el mantenimiento del orden establecido en los ya conocidos.
Acción en el discurso encubierto	<i>Señala el conteo con la extensión de los dedos y sin habla manifiesta.</i> <i>Desplaza los objetos materiales para contarlos, e indica la cardinalidad del conjunto que forman.</i> <i>Autocorrigie los errores en la enunciación de la serie numérica.</i> En esta fase el movimiento cambia en la forma, se transfiere a los objetos materiales, los cuales desplaza de un lugar a otro al etiquetarlos y avanzar en la enunciación de la serie, pero sigue anclado al cuerpo para el establecimiento de relaciones numéricas. Este sistema de condiciones posibilita la regulación de la actividad del estudiante en relación con su pensamiento numérico. Evoluciona, pero está a su disposición en el momento que lo requiere para dar seguimiento al proceso. Por otra parte, la capacidad de autocorregir los errores que se presentan en la secuencia numérica, evidencia la formación interna de un conjunto de palabras a las que les está otorgando significado. Su actividad se transforma continuamente orientándolo en su actuar y posicionando sus ideas numéricas en diferentes niveles de abstracción (Lakoff & Nuñez, 2000).
Acción mental	<i>Responde específicamente a cuestionamientos sobre la cardinalidad de un conjunto y determina la estrategia para el conteo, por ejemplo, “¿Cuántas pelotas hay? (al señalarle un conjunto formado con dibujos).”</i> <i>Dibuja trazos, sin apoyo visual, que encierran un significado numérico para el propio estudiante.</i> Toma decisiones acerca de la estrategia que aplicará, como el desplazamiento o apilamiento de objetos materiales o marcas sobre los objetos materializados. Inicia la secuencia para el establecimiento de relaciones numéricas entre los componentes y contesta la pregunta planteada, evidenciando sus recursos y el empleo de un lenguaje específico para comunicar sus ideas numéricas. Su desempeño se guía por significados y el empleo de elementos semióticos (Figura 1). Toma decisiones y ejecuta sus acciones en el conteo, en forma cada vez más fluida y sin acompañamiento del adulto o de sus compañeros.

Figura 1

Conteo de elementos y trazo de un signo numérico



Nota. El estudiante se auxilia de marcas para el conteo y escribe el ocho. Básicamente con la forma correcta hasta donde le permite su coordinación, pero inclinado.

El análisis del proceso de aprendizaje, a través de la formación planificada de acciones mentales, muestra que, la formación de bases aritméticas se convierte en una experiencia en la que el estudiante participa de forma activa y equitativa en la realización de tareas (Ainscow, 2025), con progresión a su propio ritmo y con el uso de otras herramientas, como los dedos, al recibir influencia de su entorno (Gallagher, 2023). Además, evidencia la generación de herramientas propias, entre ellas el movimiento corporal en la comprensión y evolución de conceptos matemáticos (Schluchter et al., 2023) y el uso significativo de elementos semióticos, nombres y grafías numéricas.

Implicaciones pedagógicas

La formación planificada de acciones mentales constituye una herramienta metodológica para llevar a cabo tareas y prácticas dentro del salón de clase, con el apoyo en una amplia gama de aspectos simbólicos durante la actividad conjunta, orientados a la formación de significados numéricos. La flexibilidad del método permite adaptar las tareas a las características particulares y antecedentes académicos de los estudiantes y, les ofrece la oportunidad de participación individual y colaborar, en correspondencia al desarrollo de habilidades del propio estudiante y a las características de su entorno.

Como también se señala en el diseño universal del aprendizaje (DUA), la práctica educativa bajo este enfoque, busca responder a las necesidades y al ritmo de cada estudiante mediante la adaptación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como la integración de los roles del propio estudiante, compañeros y docente a los recursos pedagógicos para generar un espacio de calidad e igualdad educativa (Villegas et al., 2025; Ainscow, 2025).

Conclusiones

En la primera fase de la actividad, las bases aritméticas son asimiladas por el estudiante con discapacidad intelectual, a través de un esquema de acción que se forma con elementos enraizados en el cuerpo (Schilhab & Groth, 2024). El énfasis colocado en la voz y en el movimiento corporal desempeña funciones concretas y simbólicas en las series numéricas y en el conteo. Este recurso le permite desplegar los componentes esenciales y las relaciones numéricas que dan origen al concepto de número.

En la fase material materializada, mantiene la diferencia en la forma de abordar las tareas con el movimiento corporal, pero también recurre a otras herramientas – dedos, objetos materiales y gráficos –, con las que dota de significado la secuencia de acciones realizadas. El engranaje de hechos y palabras se transforma en ideas que pueden ser comunicadas con elementos semióticos, nombres y grafías numéricas.

En la fase del discurso abierto, el movimiento corporal representa una función estratégica para desempeñarse social y cognitivamente. La base orientadora de la acción, con esta componente, lo orienta en la ejecución de tareas, la adquisición de nuevos vocablos y el intercambio de ideas dentro de su esfera social, superando sus limitaciones de lenguaje. Es una práctica que contribuye a la visualización de su proceso de aprendizaje, a la participación activa y al entendimiento recíproco con sus pares (Salsa & Rodríguez, 2022; Kokkola, 2024).

Durante la fase del discurso encubierto, el estudiante recurre de manera reiterada al uso del movimiento corporal, como parte de su esquema de acción, para autocorregirse o reactivar los conocimientos previos en las series numéricas y establecer la correspondencia uno a uno en el conteo. Este componente le ayuda a centrar su atención en un objetivo, a avanzar en el dominio de otras herramientas semióticas como los dedos y objetos materiales/materializados y a derivar en una exposición verbal de ideas. La actividad cognitiva se transforma en el estudiante en la medida en que emplea su base orientadora de la acción para dar significado a lo que acontece en su entorno.

Las ideas numéricas en el conteo evolucionan desde lo tangible y observable hacia el manejo de elementos semióticos, en los que subyacen significados propios y la comunicación de ideas con su entorno, en la fase de la acción mental. Los hechos registrados reflejan un modo particular de abstraer las ideas numéricas y compartirlas, lo que permite superar el escaso desarrollo de sus habilidades de lenguaje y lectoescritura. La actividad surge de la compleja interacción entre el agente y su entorno (Salsa & Rodríguez, 2022), en la medida en que participa y reconoce sus propias herramientas para la formación de conceptos numéricos.

Limitaciones del estudio

El análisis se centra en un solo caso, por lo que algunos de los hallazgos pueden depender de las características particulares del agente participante.

Referencias

- Ainscow, M. (2025). *Un giro inclusivo a la equidad: Desarrollo de sistemas educativos y centros escolares más inclusivos*. Narcea Ediciones.
- Arievitch, I. A. (2017). *Beyon the brain. An agentive activity perspective on mind, development, and learning*. Sense Publisher.
- Engeness, I. (2021). *PY. Galperin's development of human mental activity. Lectures in Educational Psychology*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-64022-4>
- Gallagher, S. (2023). *Embodied and Enactive Approaches to Cognition*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009209793>
- Gandell, R. (2025). Students' Mathematical Thinking in Movement. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 11(1), 162–185.
<https://doi.org/10.1007/s40753-023-00233-z>
- Kirchhoff, M. D. (2018). The Body in Action: Predictive Processing and the Embodiment Thesis. En A. Newen, L. Bruin & S. Gallagher (Eds.), *The Oxford Handbook of 4E Cognition* (pp. 243–260). Oxford University Press.
- Kokkola, L. (2024). Languages are grounded in the body. In T. Schillhab & C. Groth (Eds.), *Embodied Learning and Teaching Using the 4E Cognition Approach. Exploring Perspectives in Teaching Practices* (pp. 15–24). Taylor & Francis, Group. <https://lcn.loc.gov/2024007028>
- Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Salsa, A. M. & Rodriguez, J. (2022). Investigar el conocimiento numérico temprano desde un enfoque dinámico y multimodal. En C. R. Rosenberg & A. Barreiro (Comps.), *Interacción social, desarrollo y aprendizaje* (pp.52-65). CIIPME-CONICET, FLACSO.
<http://www.aacademica.org/sivia.espanol/162.pdf>
- Schluchter, T., Nagel, S., Valkanover, S., & Eckhart, M. (2023). Correlations between motor competencies, physical activity and self-concept in children with intellectual disabilities in inclusive education. *Journal of Applied Research in Intellectual Disabilities*, 36(5), 1054–1066.
<https://doi.org/10.1111/jar.13115>
- Schnepel, S., Krähenmann, H., Sermier, R., & Moser, E. (2020). The mathematical progress of students with an intellectual disability in inclusive classrooms: results of a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 103–119. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00295-w>

- Solovieva, Y. (2020). Las aportaciones de la Teoría de la Actividad para la enseñanza. *Educando para Educar*, 20(37), 13–24.
<https://beceneslp.edu.mx/ojs2/index.php/epe/article/view/51>
- Solovieva, Y., & Quintanar, L. (2020). Las acciones mentales y el problema de las etapas de su formación: Siguiendo a Galperin y Talízina. *Obutchénie: Revista de Didáctica y Psicología Pedagógica*, 4(1), 59–85.
<http://doi.org/10.14393/OBv4n1.a2020-56472>
- Tarrillo, O., Mejía, J., Dávila, J. S., Pintado, C. A., Tapia, C. E., Chilón, W. M., & Velez, S. B. (2024). *Metodología de la Investigación. Una mirada global: Ejemplos prácticos*. Centro de Investigación y Desarrollo.
https://doi.org/10.37811/cli_w1078
- Villegas, G. N., Velasquez, C. D., Villacís, X. H., & Vines, L. S. (2025). Estrategias diferenciadas para la enseñanza de matemáticas en aulas inclusivas. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, 7(2), 44–55.
<https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v17i2.1401>

**Autor de correspondencia**

Elizabeth Rosales González | elizabeth.rosalesg@cinvestav.mx



Aplicaciones de la teoría de la actividad en el análisis de procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Applications of Activity Theory in the Analysis of Mathematics Teaching–Learning Processes

Edgar Vázquez Grande  | evazquezg2100@alumno.ipn.mx
CICATA - Instituto Politécnico Nacional

Recepción: 7 de julio de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

Este artículo se sitúa en el marco de la Teoría de la Actividad, tomando como referencia el modelo de sistemas de actividad de Yrjö Engeström, quien concibe las prácticas educativas como sistemas complejos, dinámicos y culturalmente mediados. A partir de este enfoque, se llevó a cabo una revisión de estudios recientes que aplican dicho modelo en el aula de matemáticas, con el objetivo de examinar cómo las interacciones, las mediaciones y las contradicciones estructuran los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dada la limitada cantidad de investigaciones disponibles, se seleccionaron tres casos representativos que permiten identificar los contextos educativos en los que se ha implementado el modelo, así como las estrategias de integración y los aportes de estas aproximaciones para comprender la actividad matemática escolar. Finalmente, se discuten las implicaciones de estos hallazgos tanto para el diseño de intervenciones formativas como para la orientación de futuras investigaciones en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave

Teoría de la actividad, sistemas de actividad, mediación, contradicciones

Abstract

This article is framed within Activity Theory, drawing on Yrjö Engeström's activity systems model, which conceptualizes educational practices as complex, dynamic, and culturally mediated systems. From this perspective, a review of recent studies applying this model in the mathematics classroom was conducted, with the aim of examining how interactions, mediations, and contradictions structure teaching and learning processes. Given the limited number of available studies, three representative cases were selected to identify the educational contexts in which the model has been implemented, as well as the integration strategies and contributions of these approaches to understanding school mathematical activity. Finally, the implications of these findings are discussed both for the design of educational interventions and for guiding future research in the field of mathematics education.

Keywords

Activity Theory, activity systems, mediation, contradictions

Introducción

La Teoría de la Actividad ha sido aplicada en diversos ámbitos como la educación, la formación profesional y el estudio de las organizaciones, lo que ha permitido comprender cómo las acciones individuales se articulan en actividades colectivas mediadas por herramientas culturales, normas sociales y condiciones histórico-sociales específicas. Desde esta perspectiva, se ha consolidado como un marco teórico relevante para analizar procesos educativos y sociales, al concebir la enseñanza y el aprendizaje como fenómenos situados, dinámicos y en permanente transformación (Engeström, 2001).

No obstante, pese a su amplio desarrollo teórico y empírico, su aplicación en investigaciones centradas específicamente en el aula de matemáticas continúa siendo limitada. Además, en los estudios existentes no siempre se aprovecha de forma sistemática el potencial analítico del modelo para comprender la complejidad de la actividad matemática escolar, particularmente en lo que respecta a las mediaciones, las tensiones internas y las formas de organización del aprendizaje (Batiibwe, 2019).

Ante esta brecha, el presente artículo tiene como propósito analizar estudios representativos publicados recientemente en revistas indexadas que emplean el modelo de sistemas de actividad como herramienta analítica en el aula de matemáticas. El objetivo es identificar las formas de integración teórica adoptadas, los contextos educativos en los que se ha aplicado y los aportes de estas aproximaciones para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. En particular, se busca mostrar cómo el modelo de sistemas de actividad permite enriquecer el análisis de la

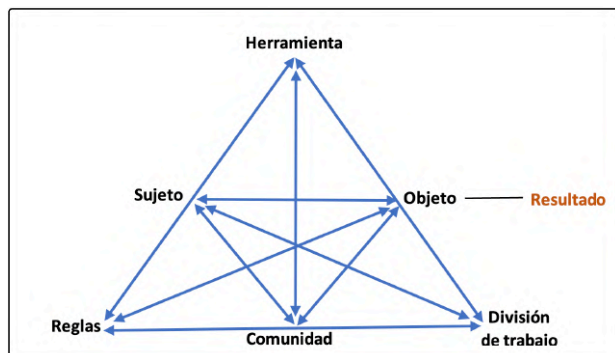
actividad matemática escolar al hacer visibles relaciones, tensiones y dinámicas que suelen quedar relegadas en otros enfoques analíticos.

Fundamentos teóricos de la Teoría de la Actividad

La Teoría de la Actividad tiene su origen en los estudios de Vygotsky, quien sostiene que la actividad humana se origina y se transforma mediante la interacción con la realidad externa, constituida por objetos tangibles y significados culturalmente constituidos (Vygotsky, 1978). Esta interacción está mediada por herramientas culturales como el lenguaje, los símbolos y los artefactos, cuya internalización posibilita la construcción de nuevas formas de pensamiento y la transformación de la actividad cognitiva y social. En este marco, la mediación constituye un principio fundamental, que trasciende los objetos físicos e incluye cualquier herramienta cultural capaz de estructurar y posibilitar la acción humana.

Sobre esta base, Engeström amplió y sistematizó la teoría mediante el modelo de sistemas de actividad, el cual concibe la actividad humana como un sistema dinámico y culturalmente mediado. Este enfoque permite analizar la actividad tanto a nivel de acciones individuales como en términos de las interacciones sociales, las normas, la distribución de responsabilidades y las tensiones internas que impulsan procesos de cambio y desarrollo (Engeström, 2001). Para ello, propone seis elementos interrelacionados (Figura 1), el sujeto, que puede ser un individuo o un grupo de participantes involucrados en la actividad; el objeto, que representa la meta que orienta la acción y que, mediante la práctica, se transforma en un resultado concreto; las herramientas, físicas y simbólicas, que median la relación entre el sujeto y el objeto y facilitan la internalización del conocimiento; las reglas, que regulan las acciones de los participantes; la comunidad, que agrupa a los actores implicados; y la división del trabajo, que define cómo se asignan tareas, roles y responsabilidades, estructurando la colaboración dentro del sistema.

Dentro de este modelo, las contradicciones ocupan un lugar central, ya que se entienden como tensiones estructurales o conflictos internos que surgen cuando los distintos elementos del sistema no están plenamente alineados con los objetivos de la actividad. Estas contradicciones actúan como motores de cambio y aprendizaje, ya que su identificación y resolución permiten transformar la actividad, generar nuevas prácticas y ajustar la interacción entre los elementos del sistema. Este proceso refuerza el papel central de la mediación en la construcción del conocimiento y en la transformación de la actividad educativa, mostrando cómo las herramientas culturales y las interacciones sociales configuran y potencian el aprendizaje (Engeström, 2001).

Figura 1*Estructura de un sistema de actividad*

Nota. Tomado de Engeström (2001)

Comprender estos principios resulta fundamental para analizar contextos educativos específicos, como el aula de matemáticas, donde convergen múltiples mediaciones, normas y formas de participación. Para ilustrar el potencial analítico del modelo de sistemas de actividad, en los apartados siguientes se presentan tres estudios empíricos que aplican este marco a distintas configuraciones de enseñanza y aprendizaje matemático. Cada caso se organiza de manera implícita en tres categorías de análisis: marco teórico, desarrollo del caso y hallazgos, lo que permite examinar de manera sistemática cómo las interacciones, las herramientas y las contradicciones modelan la actividad escolar y contribuyen a la construcción del conocimiento matemático.

CASO 1. Sistemas de actividad articulados con una propuesta de enseñanza

El primer caso analiza una propuesta de enseñanza que integra explícitamente el modelo de sistemas de actividad al diseño de actividades matemáticas. En un contexto educativo marcado por políticas que enfatizan el autoaprendizaje, la cooperación, la aplicación contextual del conocimiento, la motivación por aprender y la mejora continua, Loc et al. (2022) desarrollaron una intervención orientada a la enseñanza de la ecuación de la recta, con el objetivo de fortalecer el desempeño académico y la comprensión conceptual de los estudiantes.

La propuesta metodológica se estructuró en tres fases articuladas con el modelo de sistemas de actividad: una inicial de motivación y orientación hacia el objetivo, que buscó activar conocimientos previos y vincularlos con los nuevos; una segunda, centrada en la construcción del conocimiento, que promovió la resolución autónoma de tareas; y una tercera de consolidación y práctica, orientada a evaluar la comprensión y detectar errores conceptuales

o interpretaciones alternativas. Para medir el impacto, se aplicó un diseño cuasiexperimental con grupo de control y grupo experimental, integrado por estudiantes de décimo grado. Las evaluaciones diagnósticas y finales, respaldadas por técnicas de estadística inferencial, confirmaron la equivalencia inicial de los grupos, asegurando la comparabilidad de los resultados.

Los contenidos se centraron en la ecuación de la recta y sus conceptos asociados, como vector de dirección, ecuación paramétrica, vector normal, ecuación general y posiciones relativas entre rectas. Cada concepto fue analizado a través del modelo de sistemas de actividad y, en función de ello, se diseñaron actividades de aprendizaje estructuradas según las tres fases contempladas en la propuesta metodológica.

Como ejemplo, en la ecuación general de la recta, el sujeto correspondió a los estudiantes, el objeto a la comprensión y construcción de la ecuación, y las herramientas incluyeron hojas de trabajo y el software GeoGebra. Los resultados de aprendizaje esperados consistieron en que los estudiantes pudieran identificar la ecuación general de una recta, escribir su ecuación, determinar el vector normal y un punto sobre la recta, así como resolver problemas relacionados con la escritura de ecuaciones generales en un nivel de aplicación básico. Las reglas que guiaron la dinámica de trabajo se centraron en la organización de los estudiantes en equipos heterogéneos, lo que permitió fomentar la colaboración y la discusión, mientras que la comunidad incluyó a estudiantes y docente, y la división del trabajo definió roles y responsabilidades orientados al logro de los objetivos. Este diseño promovió interacciones significativas, la retroalimentación entre pares y el acompañamiento docente, consolidando la mediación como un componente central en la construcción del conocimiento y la transformación de la actividad matemática.

Las actividades de aprendizaje de la fase de motivación y orientación hacia los objetivos se centraron en plantear preguntas que conectaran los conocimientos previos con los nuevos contenidos, tales como la interpretación de la gráfica de la función $y = ax + b$, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(1,0)$, y la representación de una recta en el plano cartesiano mediante una expresión de la forma $y = ax + b$.

Durante la fase de construcción del conocimiento se introdujo el concepto de ecuación general de una recta a partir de una actividad de observación y análisis. Los estudiantes examinaron diversas rectas generadas automáticamente en GeoGebra junto con sus correspondientes ecuaciones y analizaron patrones y regularidades en la relación entre la representación gráfica y su forma algebraica. Este proceso permitió que los estudiantes infirieran de manera progresiva la estructura general de la ecuación de la

recta. Las conjeturas formuladas fueron posteriormente validadas por el docente mediante una breve sistematización. Como cierre de esta fase, se propuso un problema para discusión en equipos: “En el plano cartesiano, sea Δ una línea recta que pasa por el punto $M(x_0, y_0)$ y $\vec{n}$ un vector normal. Determina la condición que debe cumplir un punto $M(x, y)$ para pertenecer a la recta Δ ”.

En la fase de práctica y consolidación del conocimiento, se plantearon actividades orientadas a fortalecer la comprensión de los conceptos y promover el trabajo colaborativo. Entre las tareas desarrolladas se incluyeron las siguientes:

1. En el plano cartesiano, dada una línea recta $d: 2x + 3y + 2 = 0$, encuentra un vector normal y un vector de dirección de d .
2. En el plano cartesiano, dada una línea recta d que pasa por el punto $A(1, 2)$ y tomando $\vec{n}(1, 2)$ como un vector normal.
 - a) Escribe la ecuación general de la recta d .
 - b) Escribe la ecuación general de la recta d' , donde d' pasa por $B(1, 1)$ y $d' \parallel d$.
3. En el plano cartesiano, dadas dos puntos $A(1, 4)$ y $B(3, 2)$, escribe la ecuación general de la línea recta AB .

El análisis de los cinco casos incluidos en la propuesta evidenció que la implementación de un enfoque pedagógico fundamentado en la Teoría de la Actividad permitió que el grupo experimental alcanzara resultados superiores al grupo de control, que recibió instrucción mediante métodos tradicionales.

Asimismo, se observó un incremento notable en la motivación, la participación activa y la colaboración entre los estudiantes, quienes se involucraron en tareas con sentido dentro de entornos de aprendizaje interactivos. Estos hallazgos sugieren que este enfoque resulta pertinente en contextos rurales y remotos, donde las limitaciones de tiempo, los vacíos en conocimientos previos y los bajos niveles de motivación representan obstáculos frecuentes para el aprendizaje.

En conjunto, este estudio muestra que el modelo de sistemas de actividad puede integrarse de forma consistente con diversas estrategias metodológicas, configurándose como un marco conceptual flexible que articula teoría, práctica y mediación educativa. Dicha integración favorece la construcción de conceptos matemáticos y contribuye al desarrollo de habilidades de resolución de problemas, la reflexión crítica y la internalización del conocimiento, configurando un enfoque de enseñanza orientado al aprendizaje activo, colaborativo y significativo, y con proyección para el diseño de intervenciones educativas inclusivas y contextualizadas.

CASO 2. Sistemas de actividad para comparar el aprendizaje dentro de una misma cultura

Mientras el primer caso ilustra el uso del modelo de sistemas de actividad como herramienta para el diseño didáctico, el segundo se centra en su potencial analítico para comparar distintas formas de organización del aprendizaje dentro de un mismo contexto cultural. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituyen un campo de alta complejidad, especialmente cuando se analizan prácticas pedagógicas arraigadas en tradiciones educativas específicas. Un ejemplo destacado se encuentra en Japón, donde Sekiguchi (2021) comparó dos sistemas de actividad diseñados para analizar lecciones centradas en la resolución de problemas matemáticos, proporcionando perspectivas profundas sobre cómo las dinámicas de aula y las mediaciones culturales influyen en la comprensión y aplicación del conocimiento matemático.

El primer sistema de actividad se apoyaba en la estructura tradicional de resolución de problemas propuesta por Polya: comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y reflexionar. En este modelo, el objeto era la construcción de problemas matemáticos desafiantes; los sujetos, estudiantes de noveno grado; y las herramientas, los conocimientos previos y los instrumentos para dibujar, graficar y calcular. La comunidad estaba conformada por estudiantes y docente, y las interacciones seguían reglas típicas de la enseñanza tradicional, como el esquema de Iniciación-Respuesta-Evaluación. La división del trabajo se centraba en el docente, quien dirigía y coordinaba la actividad, y el resultado esperado consistía en la adquisición de nuevos conocimientos y habilidades matemáticas.

Por su parte, el segundo sistema se inspiraba en el enfoque de la Escuela como Comunidad de Aprendizaje (School as Learning Community, SLC), propuesto por Manabu Sato en Japón a partir de la década de 1980. Este enfoque concibe el aprendizaje como un proceso disciplinar, colaborativo y desafiante, en el que la resolución compartida de problemas y la interacción entre pares ocupan un lugar central en la construcción del conocimiento matemático.

En este sistema, el objeto se centraba en la resolución compartida de tareas; los sujetos eran también estudiantes de noveno grado; y las herramientas incluían conocimientos previos, instrumentos matemáticos, estrategias de resolución de problemas y métodos de aprendizaje colaborativo. La comunidad, integrada por los propios estudiantes y docente, operaba bajo la regla de colaboración activa, y la división del trabajo combinaba la contribución individual con la cooperación, lo que favoreció la construcción colectiva del conocimiento. El resultado esperado consistía en la retexturización de significados y relaciones, lo que promovió

una comprensión más profunda y compartida de los conceptos matemáticos.

Un ejemplo concreto que ilustró este enfoque se desarrolló en una clase que trabajaba el uso de variables como herramienta para representar y demostrar relaciones matemáticas. La actividad consistió en analizar los caminos que rodeaban dos jardines con forma cuadrada. A partir de la Figura 2, tarea 1, se solicitó a los estudiantes calcular el área del camino S , el ancho del camino a y la longitud de la línea central l para cada jardín y luego formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre estas tres variables. Tras distribuir una hoja de trabajo, el docente inició la actividad mostrando a los estudiantes una serie de representaciones gráficas de los jardines, como punto de partida visual, y luego explicó la primera tarea, correspondiente a la etapa de reparto de responsabilidades dentro del grupo.

Los estudiantes trabajaron en grupos de tres o cuatro integrantes para resolver la tarea inicial, registraron los resultados en una tabla que luego completaron de manera colectiva. Posteriormente, discutieron las posibles relaciones entre las variables, expresadas en las igualdades:

$$S = a \cdot l \text{ y } l = \frac{S}{a}.$$

A partir de estas conclusiones, el docente introdujo una “tarea de salto” para explorar la validez general de la relación en distintos tamaños de jardín y camino. Esta consistió en analizar un jardín cuadrado rodeado por un camino de ancho a y con lado de longitud p , donde S representaba el área del camino y l la longitud de la línea central (Figura 2, tarea 2). Los estudiantes debieron explicar y justificar la relación $S = a \cdot l$, lo que favoreció la generalización del concepto y la reflexión matemática, junto con la colaboración, la mediación docente y la construcción colectiva del conocimiento.

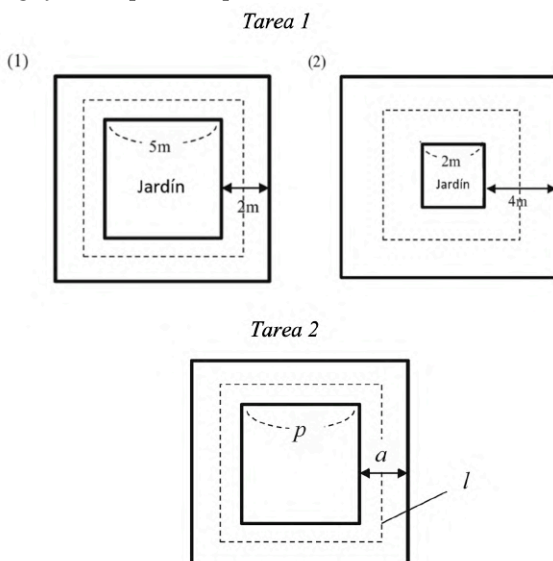
Entre las conclusiones más relevantes del estudio destaca el reconocimiento de que las contradicciones entre los dos sistemas de actividad analizados son profundas y, en algunos casos, están estrechamente vinculadas a elementos de la cultura educativa tradicional japonesa. Estas tensiones se manifestaron de manera particular en los componentes de reglas y de división del trabajo. En el sistema tradicional de resolución de problemas, el énfasis recae en el trabajo individual, lo que relega el intercambio de ideas con los compañeros a una etapa final de la lección. En contraste, el enfoque de la SLC promueve la colaboración sostenida a lo largo de toda la actividad, concibiendo la interacción entre pares como un componente central del proceso de aprendizaje.

Con relación con los componentes de herramientas y resultados, el estudio señala que las estrategias de resolución de problemas propuestas por

Polya fueron concebidas principalmente para contextos de trabajo individual o bajo la supervisión directa del docente, sin considerar de manera explícita la resolución colaborativa. En contraste, el modelo de la SLC reconoce y valora estrategias propias del trabajo colectivo, como la “búsqueda de ayuda” y la “escucha activa”, y las integra como herramientas mediadoras fundamentales para la resolución conjunta de problemas y, por ende, para el desarrollo del aprendizaje matemático.

Figura 2

Representaciones graficas del problema presentadas en las hojas de trabajo



Nota. Tomado de Sekiguchi (2021)

Desde la perspectiva del objeto de la actividad, una dificultad recurrente en la enseñanza tradicional de las matemáticas ha sido la desigualdad en los logros de aprendizaje de los estudiantes. En este modelo, es frecuente que los docentes pospongan la presentación de problemas con mayor nivel de complejidad hasta que la mayoría del grupo haya asimilado los contenidos básicos, lo que suele ocurrir al final de la unidad. También es común la organización de la clase en grupos diferenciados según el nivel de desempeño, a los que se asignan a cada uno tareas acordes con su rendimiento, de este modo, los problemas de mayor complejidad rara vez se plantean al grupo con menores logros académicos.

En contraste, el diseño de lecciones basado en el modelo SLC redefine el objeto de la actividad al situar la investigación matemática como eje central del aprendizaje. Para ello, el docente estructura la enseñanza a partir

de dos tipos de tareas: tareas para compartir y tareas de salto. Este enfoque promueve que las tareas de salto, caracterizadas por su nivel de exigencia cognitiva, se ofrezcan a todos los estudiantes desde las etapas iniciales de cada lección. Lejos de constituir un obstáculo, estas tareas funcionan como dispositivos de activación del aprendizaje, ya que estimulan la exploración, la formulación de conjeturas y el intercambio de ideas, y favorecen al mismo tiempo la comprensión progresiva de los conocimientos básicos.

Las comparaciones entre ambos sistemas muestran cómo las contradicciones internas, particularmente en los componentes de reglas, de división del trabajo y de herramientas, reflejan tensiones históricas propias de la cultura educativa japonesa. Al mismo tiempo, evidencian que dichas contradicciones pueden convertirse en motores de transformación cuando se reconfigura el objeto de la actividad hacia la investigación matemática colectiva, lo que confirma el valor del modelo de sistemas de actividad para comprender cambios cualitativos en la enseñanza de las matemáticas dentro de contextos culturales específicos.

CASO 3. Sistemas de actividad en enfoques pedagógicos apoyados por tecnología

El tercer estudio desplaza el análisis hacia escenarios educativos mediados por tecnologías digitales, lo cual amplía el alcance del modelo de sistemas de actividad a configuraciones pedagógicas contemporáneas. En las últimas décadas, la incorporación de innovaciones tecnológicas en los sistemas educativos ha propiciado la adopción de nuevos enfoques de enseñanza, entre los que destaca el modelo de aula invertida. Este enfoque ha adquirido relevancia al reconfigurar los roles tradicionales del docente y del estudiante, así como al introducir nuevas herramientas y reglas que transforman la organización de la actividad educativa.

Difundido por Jonathan Bergmann y Aaron Sams a partir de 2012, el aula invertida se caracteriza por trasladar la instrucción directa fuera del aula, generalmente mediante recursos digitales, y destinar el tiempo presencial a actividades de aplicación, resolución de problemas e interacción colaborativa, lo que promueve un aprendizaje activo centrado en el estudiante (Fredriksen et al., 2024; Esperanza et al., 2021). No obstante, Fredriksen y Hadjerrouit (2019) desarrollaron una investigación en el contexto noruego en la que señalan que la implementación de este enfoque en la enseñanza de las matemáticas genera tensiones cuya identificación y análisis resultan fundamentales para el diseño de aulas invertidas con mayores aportes al aprendizaje.

Partiendo del supuesto de que las actividades educativas solo pueden comprenderse en relación con su contexto sociocultural, el análisis de estas

tensiones se aborda mediante el modelo de sistemas de actividad, articulado con el principio de contradicción dialéctica. Este principio sostiene que las contradicciones emergen cuando nuevas herramientas, normas o formas de organización entran en tensión con componentes previamente estabilizados, lo que les confiere un carácter estructural e histórico, que se manifiestan tanto al interior como entre sistemas de actividad (Engeström, 2001).

En este marco, la investigación examina una experiencia de aula invertida concebida como un sistema de actividad complejo. El sujeto de la actividad estuvo constituido por estudiantes de primer año de ingeniería de una universidad noruega, quienes participaron en un entorno de aprendizaje mediado por diversas herramientas, entre ellas videos, tecnologías digitales, cuestionarios realizados fuera del aula, libros de texto, tareas matemáticas presenciales y otros materiales de estudio.

El objeto de la actividad se orientó al desarrollo de habilidades matemáticas mediante la resolución de problemas, la modelación de situaciones, la realización de tareas obligatorias y la preparación para exámenes, con énfasis en la comprensión y aplicación de contenidos avanzados como las series de Fourier, la transformada de Laplace, las ecuaciones de recurrencia, las demostraciones formales, la lógica matemática y la optimización en funciones de dos variables. El resultado esperado se concretaba en la aprobación de las evaluaciones académicas, condición necesaria para la continuidad en el programa de estudios y la eventual obtención del título profesional.

Las reglas que estructuraban el sistema de actividad estuvieron determinadas por el currículo universitario, los criterios de evaluación, las políticas institucionales y otros compromisos académicos, como tareas y exámenes obligatorios, además de las restricciones temporales propias del curso. La división del trabajo se configuró a partir de los roles diferenciados del docente y de los estudiantes tanto en el aula invertida como en el contexto universitario, lo que promovió la participación activa del estudiantado en dinámicas grupales y tareas colaborativas, así como su interacción con la comunidad académica, integrada por compañeros de clase, docentes y otros actores institucionales.

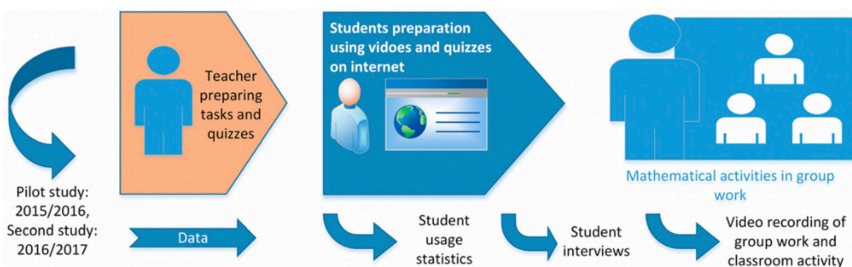
La recopilación de datos incluyó la filmación de actividades grupales, entrevistas semiestructuradas individuales y una encuesta anónima sobre las percepciones del estudiantado respecto al modelo de aula invertida. En una fase inicial se revisaban los contenidos de los videos a través de una introducción breve e interactiva dirigida por el docente, cuya duración variaba según el nivel de preparación y las dudas planteadas. Posteriormente, los estudiantes desarrollaban tareas vinculadas con los contenidos trabajados, provenientes del libro de texto o diseñadas por el

docente, las cuales podían abordar tanto contenidos previamente conocidos como otros de mayor complejidad procedimental. El resto de la sesión se destinaba al trabajo colaborativo en grupos, con intervenciones puntuales del docente para ofrecer aclaraciones generales y, en algunos casos, una breve recapitulación final.

El análisis permitió identificar 158 tensiones, organizadas inicialmente en 26 categorías de contradicción que, de acuerdo con su naturaleza dialéctica, fueron reorganizadas en tres tipos. Las contradicciones entre lo conceptual y lo procedimental reflejaban tensiones entre la comprensión de los conceptos matemáticos y los procedimientos utilizados para la resolución de tareas. Las contradicciones entre la orientación del profesor y la autonomía del estudiante evidenciaban discrepancias respecto al control y la iniciativa del proceso de aprendizaje. Finalmente, las contradicciones entre lo individual y lo colectivo se asociaban a desequilibrios entre los objetivos personales del estudiantado y las metas compartidas del trabajo colaborativo en el aula.

Figura 3

Diseño de investigación que muestra el uso de la recopilación de datos dentro y fuera del aula



Nota. Tomado de Fredriksen y Hadjerrouit (2019)

Dentro de las contradicciones entre lo conceptual y lo procedimental se distinguieron tres subcategorías: las dificultades del estudiantado para abordar el aprendizaje basado en problemas y la modelación matemática; la adopción mecánica de rutinas en el trabajo grupal sin una reflexión conceptual que orientara el avance colectivo; y la preferencia por un aprendizaje procedimental orientado a la evaluación, en contraste con la intención docente de promover la comprensión conceptual.

Por su parte, las contradicciones entre la orientación del profesor y la autonomía del estudiante se organizaron en ocho subcategorías, entre las que se incluyeron la falta de autodisciplina para el aprendizaje autónomo, la expectativa de una enseñanza directa por parte del docente, el rechazo a

nuevas dinámicas de trabajo grupal, la percepción de los videos como una carga excesiva, las objeciones al uso del tiempo de clase para la resolución de problemas, la baja calidad de las discusiones, las dificultades derivadas de la falta de preparación de algunos estudiantes y la necesidad de recuperar contenidos durante la sesión presencial.

Finalmente, las contradicciones entre lo individual y lo colectivo comprendieron tres subcategorías: la ausencia en el trabajo grupal debido a ansiedad u otras razones personales, la preferencia por el trabajo individual y la dificultad para seguir el ritmo del grupo, lo que exigía mayor tiempo para procesar la información.

Sin embargo, el estudio también reconoce que no todas las tensiones observadas podían ser interpretadas como contradicciones dialécticas. Como señalan Engeström y Sannino (2011), muchos conflictos, inconsistencias o dilemas no representan contradicciones estructurales del sistema, sino que responden a situaciones puntuales, dilemas personales, características individuales o desacuerdos interpersonales, cuyas consecuencias suelen limitarse a tensiones de corto plazo.

Desde esta distinción, se presentan 44 tensiones adicionales organizadas en doce subcategorías. Entre las más recurrentes se encuentran la escasa fluidez matemática de los estudiantes, los cuestionamientos sobre la utilidad de las matemáticas en su formación, las dificultades de comunicación durante clases expositivas, la limitada interacción con el docente en videos unidireccionales, la distracción durante las sesiones presenciales, los problemas para aprender mediante formatos audiovisuales, la persistencia de conflictos en el trabajo grupal, la desalineación entre las tareas del libro de texto y las dinámicas del aula invertida y el uso de los videos como herramienta de enseñanza que restringe la discusión colectiva, al promover una lógica de aprendizaje individual.

Estos resultados muestran que las contradicciones inherentes al modelo de aula invertida, lejos de constituir obstáculos, representan oportunidades para promover un aprendizaje matemático más profundo y transformador. Las tensiones entre lo conceptual y lo procedimental, entre la orientación del docente y la autonomía del estudiante, y entre lo individual y lo colectivo, brindan un marco analítico pertinente para diseñar estrategias pedagógicas que fortalezcan la comprensión conceptual, la colaboración efectiva y la autonomía del estudiantado.

La identificación y gestión de estas contradicciones permite que metodologías activas, como el aula invertida, se ajusten a las necesidades, estilos de aprendizaje y niveles de los estudiantes, y propicien prácticas educativas más inclusivas, flexibles y capaces de generar cambios significativos en el aprendizaje.

Conclusiones

El análisis de los estudios incluidos en este artículo evidencia que el modelo de sistemas de actividad de Engeström proporciona un marco conceptual consistente para abordar la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este enfoque permite considerar de manera integral cómo los sujetos, los objetos, las herramientas, las reglas, la comunidad y la división del trabajo interactúan en la actividad escolar, mostrando cómo las mediaciones culturales y las tensiones internas condicionan la construcción del conocimiento matemático y la transformación de las prácticas educativas.

Los casos examinados destacan la flexibilidad del modelo, que se adapta a contextos educativos diversos y a distintos enfoques metodológicos. Su implementación se pudo observar tanto en intervenciones orientadas a la comprensión conceptual y la colaboración entre estudiantes, como en análisis de dinámicas culturales de enseñanza y en entornos mediados por tecnologías digitales, como el aula invertida. Esta capacidad de adaptación permite identificar patrones de interacción, normas compartidas y objetivos comunes, ofreciendo elementos de análisis sobre los procesos de aprendizaje matemático en distintos escenarios.

Se reconoce, sin embargo, que la revisión presenta limitaciones. Al centrarse únicamente en tres estudios representativos, es posible que se hayan omitido investigaciones relevantes en otros contextos culturales, tecnológicos o educativos. Asimismo, la heterogeneidad metodológica y los distintos niveles educativos dificultan la generalización de los hallazgos, por lo que estos deben interpretarse como indicativos de tendencias y posibilidades más que como conclusiones universales.

En este sentido, se recomienda que futuras investigaciones amplíen el alcance del modelo de sistemas de actividad a contextos diversos, con especial atención a cómo las mediaciones culturales, las interacciones y las contradicciones pueden convertirse en oportunidades de innovación educativa. Asimismo, resulta pertinente explorar de manera sistemática cómo la mediación tecnológica y las prácticas colaborativas pueden facilitar la resolución de tensiones internas, lo que favorece un aprendizaje matemático más profundo, inclusivo y transformador.

Referencias

- Batiibwe, M. (2019). Using Cultural Historical Activity Theory to understand how emerging technologies can mediate teaching and learning in a mathematics classroom: a review of literature. *RPTEL 14*(12).
<https://doi.org/10.1186/s41039-019-0110-7>

- Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133–156.
<https://doi.org/10.1080/13639080020028747>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2011). Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts: A methodological framework. *Journal of Organizational Change Management*, 24, 368–387.
<https://doi.org/10.1108/09534811111132758>
- Fredriksen, H., & Hadjerrouit, S. (2019). An activity theory perspective on contradictions in flipped mathematics classrooms at the university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(4), 520–541.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1591533>
- Fredriksen, H., Rebenda, J., Rensaa, R. J., & Pettersen, P. (2024). Inquiry-Based Linear Algebra Teaching and Learning in a Flipped Classroom Framework: A Case Study. *PRIMUS*, 1–21.
<https://doi.org/10.1080/10511970.2024.2375712>
- Esperanza, P. J., Himang, C., Bongo, M., Selerio Jr., E., & Ocampo, L. (2021). The utility of a flipped classroom in secondary Mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(3), 382–415.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1957166>
- Loc, N. P., Oanh, N. P. P., Thao, N. P., De, T. V., & Triet, L. V. M. (2022). Activity theory as a framework for teaching mathematics: An experimental study. *Heliyon*, 8(10), e10789. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e10789>
- Sekiguchi, Y. (2021). Activity systems analysis of classroom teaching and learning of mathematics: a case study of Japanese secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 493–511.
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10069-6>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes*. Harvard University Press.

Autor de correspondencia

Edgar Vázquez Grande | evazquezg2100@alumno.ipn.mx



Del libro de texto al aprendizaje: análisis APOE de la comprensión de la dependencia lineal

From Textbook to Learning: An APOS Analysis of the Understanding of Linear Dependence

Irenisolina Antelo Lopez  | irenisolina.antelo@unison.mx
Universidad de Sonora

César F. Romero Félix  | cesar.romero@unison.mx
Universidad de Sonora

Recepción: 7 de junio de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

En este estudio se analiza la comprensión de la dependencia lineal y sus relaciones con la combinación e independencia lineal en dos contextos: una propuesta de enseñanza fundamentada en APOE, implementada con 32 estudiantes de ingeniería, y el tratamiento del concepto en un libro de texto universitario. Se emplea la teoría APOE como marco teórico-metodológico. Los resultados muestran que el libro de texto introduce estas relaciones de manera declarativa y acumulativa, presuponiendo su disponibilidad para el estudiante, mientras que en la implementación se observa que su construcción no es trivial y requiere exploración en distintas dimensiones, así como la consideración de conceptos de naturaleza geométrica y algebraica, y un trabajo progresivo con combinaciones lineales. El análisis comparativo pone en evidencia una desalineación entre las hipótesis cognitivas implícitas del texto y los procesos efectivos de construcción conceptual que se desarrollan en entornos de enseñanza que favorecen procesos constructivos de aprendizaje. Se discuten implicaciones para el diseño curricular y la enseñanza de conceptos centrales del Álgebra Lineal, particularmente en relación con el tiempo y la diversidad de trayectorias de aprendizaje.

Palabras clave

dependencia lineal, libros de texto, teoría APOE, Experimentos de Enseñanza

Abstract

In this study, we analyze the understanding of linear dependence and its relationships with linear combinations and linear independence in two contexts: an APOS-based instructional proposal implemented with 32 engineering students, and the treatment of the concept in a university-level textbook. APOS theory is used as the theoretical–methodological framework. The results show that the textbook introduces these relationships in a declarative and cumulative manner, presupposing their availability to students, whereas the instructional implementation reveals that their construction is not trivial and requires exploration across multiple dimensions, consideration of concepts of both geometric and algebraic nature, and progressive work with linear combinations. The comparative analysis highlights a misalignment between the implicit cognitive assumptions of the textbook and the actual processes of conceptual construction that emerge in teaching environments that promote constructive learning processes. Implications for curriculum design and for the teaching of central concepts in Linear Algebra are discussed, particularly with respect to time and the diversity of learning trajectories.

Keywords

Linear dependence; textbooks; APOS theory; teaching experiments

Introducción

Este artículo se enmarca en el eje *Retos y Perspectivas en la Enseñanza de las Matemáticas*, al abordar las tensiones entre la estructura lineal y formal del discurso en los libros de texto universitarios y la construcción no lineal del aprendizaje por parte de los estudiantes en entornos de enseñanza fundamentados en marcos teóricos constructivistas. Lo anterior es especialmente relevante si se considera que en las últimas décadas la necesidad de reflexionar, cuestionar y cambiar los enfoques de enseñanza dominantes en Álgebra Lineal ha sido argumentada en la literatura especializada tanto por la creciente importancia de la disciplina en la resolución de problemas complejos en las áreas STEM (Stewart et al., 2022) como por las dificultades persistentes que enfrentan los estudiantes bajo un enfoque tradicionalmente transmisivo, relacionado con un estilo pedagógico predominantemente algorítmico o centrado en el formalismo matemático (Dorier, 2000). Identificar las tensiones entre contextos, promueve una reflexión crítica sobre los supuestos a partir de los cuales se organiza el conocimiento matemático en los recursos institucionales y permite generar propuestas didácticas más sensibles a los procesos constructivos del estudiante. Lo anterior se hace notable en el aprendizaje de conceptos como la dependencia lineal, cuya comprensión no solo implica el dominio de definiciones formales, sino la construcción progresiva de relaciones con nociones como la combinación y la independencia lineal. La

forma en que estas relaciones se presentan y organizan varía significativamente entre contextos de enseñanza, generando distintos caminos posibles para el desarrollo del conocimiento matemático.

En este trabajo se analiza comparativamente la construcción del aprendizaje del concepto de dependencia lineal que se promueve en un libro de texto clásico de Álgebra Lineal (Poole, 2011) y en una propuesta de enseñanza basada fundamentada por una teoría constructivista y cognitiva, con el fin de identificar cómo cada contexto organiza y restringe las relaciones entre conceptos y qué efectos tiene ello en la construcción progresiva del conocimiento sobre la dependencia lineal. De esta manera, se responde a la pregunta:

¿En qué difiere la construcción progresiva del aprendizaje sobre la dependencia lineal entre un libro de texto clásico (Poole, 2011) y una propuesta de enseñanza fundamentada en una teoría constructivista del aprendizaje, en cuanto a los supuestos sobre cómo comprenden los estudiantes las relaciones con la combinación e independencia lineal?

Antecedentes

Diversos estudios muestran que el aprendizaje de conceptos abstractos se ve favorecido cuando los estudiantes participan activamente en tareas que demandan exploración, argumentación y establecimiento de relaciones, como la resolución de problemas de modelación o el trabajo con secuencias de tareas cognitivamente desafiantes (Trigueros, 2018; Wawro et al., 2022). En contraste, se supone que el uso directo y acrítico de libros de texto tradicionales puede obstaculizar estos objetivos, al presentar el contenido bajo una estructura lineal y acumulativa que no siempre se corresponde con los procesos reales de aprendizaje de los estudiantes.

Elementos matemáticos

Para realizar el análisis señalado, se seleccionó uno de los conceptos fundamentales en Álgebra Lineal, la dependencia lineal debido a que además de permitir abordar problemas complejos en disciplinas como la Ciencia de Datos, el concepto permite identificar relaciones internas entre vectores, detectar redundancia en conjuntos de datos y analizar la estructura de los espacios vectoriales. Este concepto se vincula con la comprensión de otros conceptos. Por ejemplo, en un curso introductorio de Álgebra Lineal, los estudiantes deben comprender su relación con la combinación e independencia lineal y con sistemas de ecuaciones (Trigueros, 2018).

En este contexto, la combinación lineal es un referente central para entender cómo un conjunto de vectores genera un espacio (Turgut et al.,

2022) y cómo un vector puede expresarse en términos de otros, lo que resulta necesario para identificar relaciones lineales. La independencia lineal, por su parte, permite determinar cuándo un conjunto de vectores aporta información nueva o redundante, lo que adquiere relevancia en aplicaciones como el análisis de datos y la optimización de modelos (Stewart et al., 2022).

Elementos curriculares

Es notable que, en la práctica del aula, la comprensión de las relaciones conceptuales no siempre se logra con la profundidad esperada por los profesores o instituciones. Esto sucede aun cuando los libros de texto, como el de Poole (2011), establecen formalmente conexiones entre la dependencia lineal y otros conceptos, afirman estar alineados con las recomendaciones de recomendaciones internacionales para la enseñanza de Álgebra Lineal incluso parecen cumplir con las recomendaciones actualizadas de The LACGS 2.0 (Stewart et al., 2022). Es posible, que la causa sea que la construcción de la comprensión requiere tiempo, exploración guiada y oportunidades para la indagación y la reflexión (Arnon et al., 2014; Stewart et al., 2022), condiciones que no siempre están presentes en el desarrollo cotidiano de las clases. La discrepancia entre lo que se muestra en el texto y lo que construyen los estudiantes requiere ser analizada desde una perspectiva cognitiva, ya que involucra no sólo el contenido matemático en sí, sino también los procesos mediante los cuales los individuos construyen su comprensión de los conceptos matemáticos y sus relaciones en entornos de enseñanza fundamentados en teorías constructivistas del aprendizaje.

Por ejemplo, algunas investigaciones centran la atención en las conexiones de implicación lógica de los conceptos de los sistemas lineales con la combinación, dependencia e independencia lineal. Harel (2017), reporta que algunos estudiantes interpretan erróneamente que una combinación lineal de vectores implica un único conjunto de escalares, cuando en realidad puede haber múltiples. Esta comprensión limitada compromete su capacidad para abordar propiedades como la expresión única de un vector en términos de vectores linealmente independientes.

Identificación de intenciones y potencialidades de desarrollo cognitivo a partir de libros de texto

Aunque en los últimos años ha habido un incremento en los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal, la investigación específica que analiza cómo los libros de texto influyen en la comprensión y aprendizaje de los estudiantes sigue siendo limitada. Las investigaciones, en

este contexto, han sido analizadas como objetos culturales, aceptados por una comunidad especializada, que promueven determinadas estructuras mentales en los estudiantes, aunque muchas veces de manera implícita.

Betancur-Sánchez, Roa- Fuentes y Ballesteros (2021) propusieron una forma viable de desarrollar las construcciones mentales asociadas a los conceptos de eigenvalores y eigenvectores, basada en el análisis de tres libros de texto, mediante una descomposición genética preliminar (DGp) en términos de la teoría APOE. Entre las contribuciones destacadas se encuentran el fortalecimiento de la comprensión conceptual del equipo investigador, la articulación con otras investigaciones y la identificación de enfoques pedagógicos y omisiones relevantes para la enseñanza.

De forma similar, Borji y Martínez-Planell (2023) propusieron una descomposición genética implícita del concepto de sólido de revolución, basada en la sección de un libro de cálculo multivariable. A diferencia de una DG elaborada por investigadores a partir de experiencias de enseñanza, se infirió y explicitó las construcciones mentales que el texto parece sugerir. El análisis se derivó de leer, resolver y reflexionar sobre los ejemplos y ejercicios propuestos. En el estudio, se concluye que el texto asume que los estudiantes ya han construido una comprensión de las sumas de Riemann en el contexto unidimensional y que reconocen su relación con las integrales definidas, sin ofrecer apoyos explícitos para dicha construcción. Los autores infieren una descomposición genética implícita en el texto, que si bien orienta ciertas construcciones mentales, no las explicita ni las desarrolla progresivamente, lo cual puede dificultar que los estudiantes construyan estructuras mentales más avanzadas de este concepto.

Referentes teóricos

La teoría APOE es una teoría cognitiva que enfatiza la construcción individual del conocimiento matemático mediante el análisis de estructuras mentales. Para ello adopta la noción de estudiante genérico, entendida como una representación abstracta que refleja construcciones mentales comunes observadas en distintos estudiantes dentro de una misma institución o contexto educativo mediante una Descomposición Genética (Trigueros, 2022).

Las estructuras mentales se caracterizan como formas particulares y etapas en la construcción del conocimiento matemático de un individuo, es decir, distintas formas de entender y organizar internamente un concepto. Estas estructuras permiten modelar cómo una persona avanza en su comprensión partiendo desde la ejecución de tareas de forma mecánica hasta la resolución de problemas complejos que requieren articular distintos conceptos. El desarrollo de las estructuras no ocurre de manera espontánea,

sino que es el producto de diferentes procesos reflexivos del individuo que se articulan mediante los mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

Las estructuras mentales específicas y que le dan nombre a la teoría son: Acción (una transformación externa), Proceso (transformación interna y significativa), Objeto (base para la transformación y el desarrollo de nuevas construcciones) y Esquemas. Cada una de estas estructuras surge de mecanismos mentales específicos, que permiten la construcción y reorganización del conocimiento matemático.

Las relaciones dentro de un Esquema, que permiten y guían su desarrollo, pueden clasificarse como de correspondencia, transformación y conservación. Estas relaciones describen la evolución de la comprensión de relaciones matemáticas desde una capacidad inicial basada en asociaciones hasta una estructura integrada y flexible que permite el uso de conceptos de manera fluida en diversos contextos (Martínez-Planell et al., 2024; Trigueros, 2018; Trigueros et al., 2024).

Una relación de correspondencia (C) se establece cuando el individuo emplea comparaciones entre estructuras, identificando similitudes y diferencias, y se evidencia cuando un individuo reconoce la asociación entre dos o más estructuras sin necesariamente justificarla o comprenderla en profundidad. Este tipo de relación suele manifestarse en las primeras etapas de comprensión matemática (Martínez-Planell et al., 2024), se distinguen particularmente las siguientes. Una *relación de transformación* (T) se desarrolla cuando un individuo reconoce que modificaciones en un componente del Esquema inducen cambios en otros y es capaz de identificar estructuras interrelacionadas. Esto se observa cuando un estudiante justifica la conexión entre distintos conceptos dentro del Esquema, estableciendo argumentos que explican sus interacciones y consecuencias (Martínez-Planell et al., 2024). Una *relación de conservación* (E) se manifiesta cuando un individuo utiliza estructuras de manera consistente en distintas situaciones problemáticas, aplicando principios de forma intercambiable y mostrando conciencia de las limitaciones o condiciones de validez de un concepto (Martínez-Planell et al., 2024).

Se distinguen tres etapas en el desarrollo de los esquemas: intra (predominan relaciones de correspondencia y Acciones y Procesos aislados), inter (relaciones de transformación y Procesos que se vinculan con otros conceptos) y trans (relaciones de conservación y Objetos de los conceptos).

Metodología

La investigación se desarrolló mediante una adaptación del ciclo de APOE (Arnon et al., 2014), planteando tres etapas: (1) Análisis teórico (2) diseño e implementación del experimento de enseñanza exploratorio y (3)

análisis comparativo de la comprensión de conexiones conceptuales que el libro asume y del desarrollo de los estudiantes bajo una enseñanza basada en APOE.

La implementación de la enseñanza fue realizada por uno de los autores en un curso introductorio de Álgebra Lineal, con 32 estudiantes de primer año de ingeniería civil, durante dos semanas (diez horas), distribuidos en 8 equipos. La intervención se diseñó en concordancia con el ciclo de investigación de APOE, en el que se propone que se promuevan las estructuras mentales descritas en una descomposición genética, alineado con investigaciones recientes (Arnon et al., 2014; Trigueros, 2018; Turgut et al., 2022; Wawro et al., 2022) y recomendaciones curriculares (Stewart et al., 2022), en el sentido de que se promueve la construcción, discusión y validación de hipótesis en entornos colaborativos mediados por GeoGebra.

La participación de los estudiantes fue voluntaria y se contó con su consentimiento informado para el uso de sus producciones con fines de investigación. Se garantizó la confidencialidad y la anonimización de los datos mediante el uso de seudónimos para identificar a los equipos y participantes, evitando cualquier referencia que permitiera su identificación personal o institucional.

Dado que, al igual que Borji y Martínez-Planell (2023), se presupone que el libro demanda ciertas concepciones para su comprensión, aunque no se expliciten ni se desarrollen progresivamente, la comparación se realiza con producciones estudiantiles que permiten hacer explícitas dichas estructuras. Por ello, se seleccionaron las producciones de dos equipos, Equipo 1 y Equipo 2, que mostraron mayor comprensión conceptual, ya que estas aproximan el tipo de sujeto genérico implícitamente asumido por el texto y permiten contrastar qué relaciones conceptuales son construidas y cómo se construyen bajo una enseñanza basada en APOE.

Análisis teórico

El análisis teórico del Esquema de Dependencia Lineal se desarrolló mediante un análisis documental: basado en el análisis de libros de texto (Lay et al., 2022; Poole, 2011), investigaciones previas sobre Esquemas (Trigueros, 2018) e investigaciones de naturaleza histórica sobre el concepto (Dorier, 2000) y descomposiciones genéticas APO previas relacionadas con el concepto.

En su versión sintética la Descomposición genética (DG) establece que El nivel intra-Esquema se manifiesta cuando un sujeto reconoce que cierto tipo de problemas, que pueden demandar concepciones previas sobre conceptos de distinta naturaleza como: la regla del paralelogramo,

combinaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, pueden involucrar simultáneamente a la dependencia lineal sobre conjuntos como $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$.

Mientras que en la etapa inter, las estructuras mentales de dependencia lineal permiten describir propiedades de conjuntos de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^n$ linealmente dependientes como Objetos. Se construyen las concepciones de dependencia lineal sobre otros conjuntos. Se construyen estructuras mentales que permiten la manipulación de los conjuntos para la construcción y deconstrucción de nuevos conjuntos LD o LI. Se comienzan a construir Procesos y Objetos que permiten relacionar la dependencia lineal con conceptos, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, transformaciones lineales, principalmente mediante relaciones de transformación y correspondencia.

Finalmente, la etapa trans, se caracteriza por el desarrollo de los Procesos y Objetos que permiten concebir las propiedades de los conjuntos linealmente dependientes, independientemente de los elementos y características del conjunto sobre el que se opera. Esta etapa involucra el desarrollo principalmente de relaciones de conservación y se evidencia por la estabilidad y coherencia en la resolución de los problemas en los que se involucra la dependencia lineal, lo cual demanda, por ejemplo, la abstracción de las propiedades del espacio vectorial V sobre el campo F .

Análisis del libro de texto

La búsqueda de información en el libro de Poole (2011) se realizó en Atlas.ti mediante una consulta sistemática de las frases *dependencia lineal*, *linealmente dependiente* y *linealmente dependientes*. Este procedimiento arrojó un total de 99 resultados distribuidos en el libro. En la sección introductoria de dependencia lineal (en el capítulo 2, pp. 99–104, se generaron 13 citas que involucraban a la dependencia lineal con combinación e independencia lineal. Estas citas fueron posteriormente discutidas y analizadas con el propósito de identificar qué tipo de relaciones matemáticas demanda el tratamiento introductorio de la dependencia lineal. De esas citas se identificaron cinco relaciones (no mutuamente excluyentes entre citas) entre componentes del Esquema diferentes, entre las cuales cinco citas fueron codificadas con la relación C3-CL-DL y cinco para T4-CL-DL (disponible en bit.ly/LibroEsquema)

Por ejemplo, la cita “El vector w depende de u y v en el sentido de que es una combinación lineal de ellos. Se dice que un conjunto de vectores es linealmente dependiente si uno de ellos puede escribirse como una combinación lineal de los otros” (Poole, 2011, p.98) se asoció con la relación de correspondencia C3-CL-DL relacionada con la capacidad de los estudiantes para observar que algunos vectores pueden escribirse en

términos de otros, pero aún no han construido una noción formal de dependencia lineal ni pueden operar sobre estos conceptos.

Por otra parte, la cita “Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_k$ es linealmente dependiente si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$, al menos uno de los cuales no es cero, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$ ” (Poole, 2011, p.99) se asoció con la relación T4-CL-DL en la cual los estudiantes dejan de percibir la combinación lineal solo como una operación aritmética y comienzan a entenderla como un criterio estructural para determinar dependencia lineal. Esto puede manifestarse a través de explicaciones geométricas, exploración numérica, razonamientos verbales o uso de GeoGebra, sin necesidad de una prueba formal. El estudiante ya no solo reconoce combinaciones, sino que justifica por qué ciertos vectores pueden o no expresarse en términos de otros.

Diseño e Implementación del Experimento de Enseñanza Exploratorio

A partir de la descomposición genética para el Esquema de dependencia lineal, se diseñó una secuencia de 10 actividades orientadas a la exploración, formulación de conjeturas y argumentación, seis relacionadas con los sistemas lineales y cuatro con combinación e independencia lineales. Las actividades se diseñaron con el objetivo de favorecer la construcción de relaciones entre componentes del Esquema, y se puso especial atención al uso de GeoGebra como medio para promover la abstracción reflexiva mediante la generación de conjeturas, así como el uso de contextos no matemáticos por su valor formativo y a la atención a las producciones de notación de los estudiantes. Para propósitos de este estudio, se limitará a las últimas cuatro (disponibles en bit.ly/actividadesDL). En la siguiente tabla se presenta la descripción de las actividades y los supuestos teóricos en los que se fundamenta:

Tabla 1

Descripción de las actividades

Código	Descripción	Supuestos teóricos sobre relaciones promovidas
E4A1	Se plantea un contexto de diseño gráfico en el que un cliente solicita la construcción de una paleta de cinco colores obtenidos exclusivamente a partir de intensidades bajas de rojo y azul. El applet en GeoGebra permite visualizar que cualquier punto del cuadrado unitario, asociado a una tonalidad, puede obtenerse como combinación del rojo y el azul, evidenciando la dependencia lineal del conjunto formado por esos tres colores.	C3-CL-DL: Los estudiantes observan que algunos vectores pueden escribirse en términos de otros, al generar distintas tonalidades como combinaciones del rojo y el azul. Sin embargo, no han construido aún una noción formal de dependencia lineal

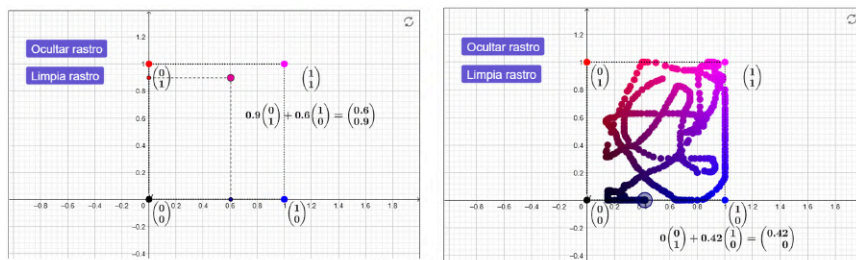
Tabla 1 (continúa)*Descripción de las actividades*

Código	Descripción	Supuestos teóricos sobre relaciones promovidas
E4A2	Se estudia la dependencia e independencia lineal a partir de la noción de combinación lineal de vectores, introducida formalmente mediante su definición algebraica y el criterio de dependencia como la posibilidad de expresar un vector como combinación de los demás. El trabajo se apoya en un applet dinámico en GeoGebra, en el que se representan conjuntos de vectores en el plano. Tal como está diseñado, el applet privilegia un caso particular de dependencia lineal, en el que los vectores se relacionan por proporcionalidad escalar.	C3-CL-DL: Los estudiantes reconocen que ciertos vectores pueden expresarse en términos de otros a partir de la proporcionalidad escalar y la colinealidad. No obstante, no han construido una noción formal de dependencia lineal ni pueden operar sobre el criterio de manera general, limitándose a identificar casos particulares.
E4A3	Se apoya en un applet dinámico en GeoGebra que permite explorar combinaciones lineales entre tres vectores u , v y w , habilitando la selección de cuál de ellos actúa como vector resultante de la combinación de los otros dos. La tarea enfatiza que la dependencia lineal es una propiedad del conjunto y que no basta verificar que un vector particular no pueda escribirse como combinación de los otros para concluir independencia lineal.	T4-CL-DL: Esto se manifiesta mediante explicaciones geométricas, y exploración con GeoGebra, donde ya no solo reconocen combinaciones, sino que justifican por qué ciertos vectores pueden o no expresarse en términos de otros, sin necesidad de una prueba formal.
E4A4	Se diseña como un puente hacia el espacio tridimensional, introduciendo la dependencia e independencia lineal a través de un contexto funcional de mezcla de suplementos nutricionales. La segunda parte abandona el contexto y se centra en la construcción de conjuntos de vectores en el espacio tridimensional. A partir de vectores dados, se solicita formar conjuntos y justificar algebraica y geoméricamente su carácter dependiente o independiente.	T4-CL-DL En esta parte, los estudiantes comienzan a concebir la dependencia y la independencia lineal como propiedades del conjunto, y justifican estructuralmente su relación a través del criterio de combinación lineal.

En la Actividad E4A1, la dependencia lineal se introdujo a partir del contexto del modelo RGB. Para ello, los estudiantes habían trabajado previamente en un entorno bidimensional, donde los colores rojo y azul estaban representados por los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, respectivamente (Figura 3). En este entorno, se visualizaban las posibles combinaciones de estos colores como puntos del plano.

Figura 1

Vista del Gradiente formado por el color rojo y azul en el plano

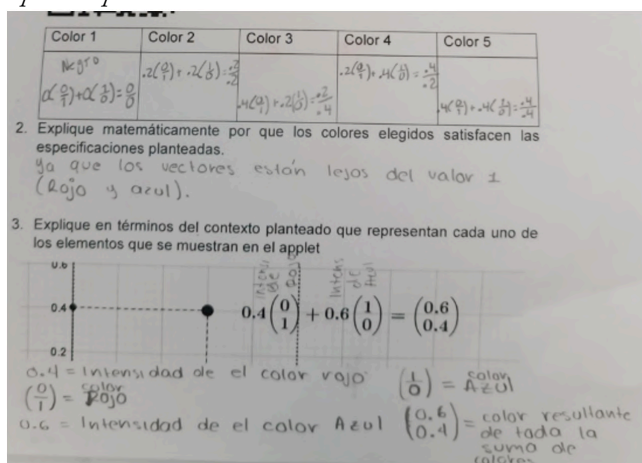


Sobre esta base, se planteó la siguiente situación:

“Un cliente desea que el color resultante en el centro del logo sea $(R, G, B) = (0.8, 0, 0.54)$. Determine: (a) si es posible generar dicho color como combinación de los colores base utilizados; (b) si los colores base son suficientemente variados como para responder a futuras solicitudes del cliente; y (c) un modelo vectorial que relacione las intensidades de rojo, verde y azul con el color resultante, expresado como un vector u .” Este razonamiento se vincula directamente con un método informal de definir la dependencia lineal. Por ejemplo, la producción del Equipo 1 se asoció con la relación C3-CL-DL por la posibilidad de los estudiantes de identificar que un color podía escribir en términos de otros (a partir de su forma vectorial).

Figura 2

Respuesta a primera parte de la Actividad E4-A1



Resultados

Los resultados se centran particularmente en las relaciones C3-CL-DL y T4-CL-DL, ya que ambas constituyen el núcleo del tratamiento

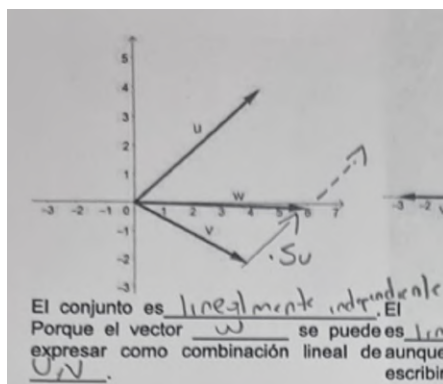
introdutorio de la dependencia lineal en el libro de texto y, al mismo tiempo, el eje de diseño de las actividades de la E4A1 a la E4A4.

El análisis del texto de Poole (2011) muestra que la relación C3 se demanda de manera temprana y reiterada, principalmente a través de definiciones y ejemplos en los que se asume que el estudiante puede reconocer que un vector puede escribirse como combinación de otros. Sin embargo, esta demanda aparece formulada de manera declarativa y algebraica, sin un trabajo explícito que permita al estudiante construir dicha relación en lo gráfico y en diferentes dimensiones.

Por ejemplo, aunque el Equipo 1 no tuvo problema en la resolución de la actividad E4A1, la interpretación de la dependencia lineal en el plano resultó compleja. En particular, al inicio los estudiantes tuvieron dificultades para identificar los componentes gráficos de la descomposición de algún vector en función de los otros, el profesor tuvo que intervenir para discutir la interpretación geométrica de la multiplicación por escalar y la suma vectorial, mediante la regla del paralelogramo. Aunque finalmente, pudieron, por ejemplo, expresar un vector como combinación lineal de los otros, concluyeron que el conjunto era linealmente independiente. Este trabajo se asocia con la relación C3-CL-DL, en la cual los estudiantes pueden identificar un vínculo entre la combinación y la dependencia lineales, pero no siempre se concluye de manera adecuada.

Figura 3

Producción de uno de los integrantes del Equipo 1



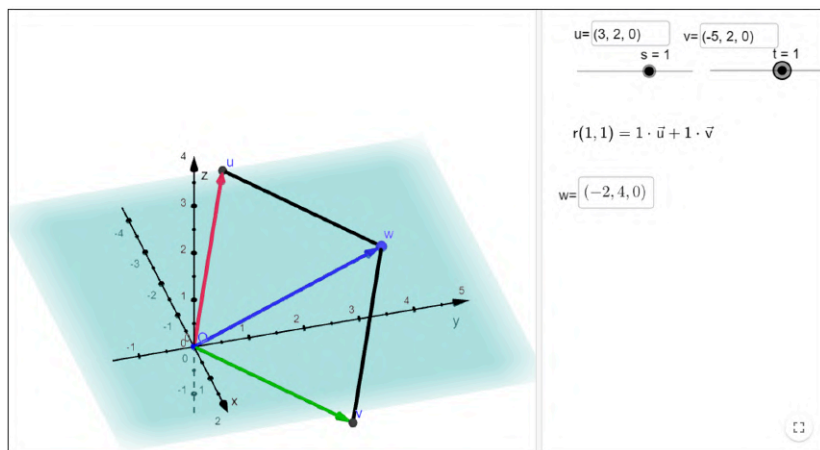
De forma análoga, la relación T4-CL-DL es introducida en el texto como un criterio ya disponible, particularmente mediante la ecuación homogénea y el uso de escalares no triviales, sin que se desarrollen progresivamente las transformaciones entre las estructuras mentales necesarias para pasar de una interpretación aritmética de la combinación

lineal a una comprensión estructural de la dependencia lineal como propiedad del conjunto. En contraste, las actividades diseñadas bajo el enfoque APOE muestran que la construcción de estas relaciones no es trivial: requiere explorar combinaciones lineales en diferentes dimensiones, coordinar representaciones geométricas (como la regla del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$), articular contextos no matemáticos y justificar más allá de la inspección algebraica.

Por ejemplo, si bien ambos equipos lograron comprender la dependencia lineal en $\mathbb{R}^2$, el cambio a $\mathbb{R}^3$ no fue trivial, en particular durante las discusiones con los equipos, ambos mostraron dificultades para extender la noción de dependencia lineal al espacio, aun así, en la cuarta sesión, lograron construir conjuntos LD, tal y como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 4

Captura de pantalla presentada por el Equipo 2 para justificar por que el conjunto $\{u, v, w\}$ que propusieron era LD



Discusiones y conclusión

Los resultados de este estudio permiten matizar la discusión sobre el papel de los libros de texto en la enseñanza del Álgebra Lineal. El análisis no sugiere que el texto de Poole (2011) sea conceptualmente incorrecto o didácticamente cuestionable, sino que su tratamiento de la dependencia lineal responde a una lógica expositiva que presupone ciertas construcciones mentales previas en el estudiante. En particular, las relaciones C3-CL-DL y T4-CL-DL aparecen de manera temprana y coherente desde el punto de vista matemático, articuladas mediante definiciones, ejemplos y criterios formales ampliamente aceptados en la comunidad.

Sin embargo, el análisis comparativo muestra que dichas relaciones, aun cuando están correctamente formuladas en el texto, no necesariamente están disponibles para los estudiantes al momento en que se les demanda. Las producciones estudiantiles evidencian que reconocer que un vector puede escribirse como combinación de otros (C3) y concebir la combinación lineal como un criterio estructural para determinar dependencia (T4) requiere un trabajo cognitivo que no es inmediato. Este trabajo incluye interpretaciones geométricas y algebraicas, la exploración en distintas dimensiones, mediante la reconstrucción progresiva de las concepciones iniciales, aspectos que el libro no desarrolla explícitamente porque no forman parte de su propósito principal. Esta presuposición coincide con lo reportado por Borji y Martínez-Planell (2023), quienes muestran que los textos orientan sobre la construcción de ciertas construcciones mentales, pero no las desarrollan progresivamente ni ofrecen apoyos explícitos para su emergencia.

Desde esta perspectiva, el desfase observado no debe interpretarse como una deficiencia del texto, sino como una diferencia entre la lógica matemática en la presentación del contenido y los procesos cognitivos mediante los cuales los estudiantes construyen su comprensión. Mientras el libro organiza el concepto de dependencia lineal de forma lineal y acumulativa, los Esquemas suelen ser más diversos y sensibles al contexto de exploración, particularmente cuando se transita del plano al espacio tridimensional o cuando se requiere justificar más allá de la inspección algebraica.

Estos hallazgos son consistentes con investigaciones previas que señalan que la comprensión de conceptos abstractos en Álgebra Lineal se beneficia de entornos de enseñanza que hagan explícitas las relaciones entre los conceptos y otorguen tiempo para su construcción (Trigueros, 2018; Wawro et al., 2022). En este sentido, el valor del libro de texto no se cuestiona, sino que se comprende como un recurso que requiere mediación didáctica para que las relaciones que presenta puedan ser efectivamente construidas por los estudiantes.

En conclusión, este estudio sugiere que la enseñanza de la dependencia lineal se fortalece cuando el uso de libros de texto se articula con propuestas didácticas que reconozcan explícitamente la complejidad cognitiva de las relaciones que estructuran el concepto.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/nxn2>

- Betancúr Sánchez, A., Roa Fuentes, S., & Ballesteros, S. J. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: El análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245–276. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2431>
- Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2023). On students' understanding of volumes of solids of revolution: An APOS analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101027. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101027>
- Dorier, J.-L. (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer.
- Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007>
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. (2022). *Linear algebra and its applications* (Sixth edition. Global edition). Pearson Education Limited.
- Martínez-Planell, R., Trigueros, M., & Borji, V. (2024). The role of topology in the construction of students' optimization schema for two-variable functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101106. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101106>
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal*. Cengage Learning.
- Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., McDonald, J., Strong, D., & Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(05), 1. <https://doi.org/10.1090/noti2479>
- Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 29–50). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_2
- Trigueros, M. (2022). APOS Theory and the Role of the Genetic Decomposition. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 61–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_6
- Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM – Mathematics Education*, 56(6), 1093–1108. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6>
- Turgut, M., Smith, J. L., & Andrews-Larson, C. (2022). Symbolizing lines and planes as linear combinations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100948. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100948>

Wawro, M., Andrews-Larson, C., Zandieh, M., & Plaxco, D. (2022). Inquiry-Oriented Linear Algebra: Connecting Design-Based Research and Instructional Change Research in Curriculum Design. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen, & C. Winsløw (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 329–348). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_16

**Autor de correspondencia**

Irenisolina Antelo Lopez | ireni1095@gmail.com