



Implementación de una secuencia didáctica para el aprendizaje de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad en secundaria

Implementation of a Didactic Sequence for Learning the Classical and Frequentist Approaches to Probability in Secondary School

✉ **Maricela Bonilla González**  | marybog1804@gmail.com
Escuela Normal Superior de México

Saúl Elizarrarás Baena  | sauleliba@gmail.com
Escuela Normal Superior de México

Orlando Vázquez Pérez  | keplermx@gmail.com
Escuela Normal Superior de México

Recepción: 16 de febrero de 2026 | Aceptación: 30 de junio de 2026

Resumen

En este artículo se describen los resultados de la implementación de una secuencia didáctica diseñada para plantear actividades que apoyen el estudio de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad en alumnos de primer grado de secundaria. La propuesta integró actividades basadas en juegos (monedas, dados, urna y ruleta) que permitieron comparar la probabilidad frecuencial con la teórica y, además, estimular el interés y la participación de un grupo de 20 estudiantes de primer grado de secundaria con quienes se trabajó. Los resultados muestran que la secuencia resultó útil para introducir a los estudiantes en el aprendizaje de los enfoques mencionados y, aunque no alcanzaron a formalizar algunos conceptos, les permitió enfrentar situaciones probabilísticas. Los hallazgos del estudio, basados tanto en un cuestionario como en el desarrollo de las actividades, también evidenciaron que los estudiantes evolucionaron desde nociones intuitivas, subjetivas y erróneas sobre situaciones probabilísticas hacia comprensiones más formales y estructuradas.

Palabras clave

Secuencia didáctica, enfoque clásico, enfoque frecuencial, probabilidad, secundaria.

✉ Autor de correspondencia | Maricela Bonilla González

Bonilla González, M., Elizarrarás Baena, S., & Vázquez Pérez, O. (2026). Implementación de una secuencia didáctica para el aprendizaje de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad en secundaria. *Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes*, 2(2), 17–32. <https://doi.org/10.24844/REMEDI/0202.01>

Abstract

This article describes the results of the implementation of a didactic sequence designed to propose activities that support the study of the classical and frequentist approaches to probability among first-year secondary school students. The proposal integrated game-based activities involving coins, dice, an urn, and a roulette wheel, which made it possible to compare frequentist probability with theoretical probability and, in addition, to stimulate the interest and participation of the group of 20 first-year secondary school students with whom the sequence was implemented. The results show that the sequence was useful for introducing students to the learning of the aforementioned approaches and, although they did not fully formalize some concepts, it enabled them to engage with probabilistic situations. The findings of the study, based both on a questionnaire and on the development of the activities, also showed that students evolved from intuitive, subjective, and erroneous notions about probabilistic situations toward more formal and structured understandings.

Keywords

Didactic sequence, classical approach, frequentist approach, probability, secondary school.

Planteamiento del problema

El estudio de la probabilidad en el nivel de secundaria (entre los 12 y los 15 años de edad) representa un desafío tanto para docentes como para los alumnos, ya que en muchas ocasiones se aborda de forma superficial debido al tiempo limitado asignado al currículo de matemáticas. Uno de los principales obstáculos para el desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes es el énfasis excesivo que algunos docentes ponen en el enfoque clásico de la probabilidad, pues este suele centrarse en procedimientos rutinarios y técnicas combinatorias para calcular probabilidades, dejando en segundo plano el enfoque frecuencial.

En el campo educativo se han desarrollado diversas investigaciones (Eichler & Vogel, 2014; Martínez & Sánchez, 2021; Nilsson, 2014; Provost et al., 2022) que se enfocan en la probabilidad desde una perspectiva frecuencial y en su relación con la probabilidad clásica. Martínez y Sánchez (2021) reportan un conocimiento limitado de conceptos básicos de probabilidad, de la relación entre los enfoques clásico y frecuencial y de su aplicación en contextos distintos de los juegos de azar por parte de estudiantes de bachillerato.

Eichler y Vogel (2014) argumentan que la enseñanza de la probabilidad debería integrar de manera articulada los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo. En particular, destacan la importancia de explorar y hacer explícitas las conexiones entre los enfoques clásico y frecuencial. Por su

parte, Provost et al. (2022) propusieron examinar cómo un diseño instruccional que parte de un escenario científico, como el clima, puede ayudar a los estudiantes a comprender ambos enfoques. Los resultados muestran que el diseño, que partió de una perspectiva frecuentista, evolucionó hacia una clásica. La interacción con los datos mediante diversas representaciones, como simulaciones, tablas y gráficos, también fomentó la comprensión de esta conexión, aunque este experimento tuvo limitaciones, ya que solo se analizó el razonamiento de una pareja de estudiantes de sexto grado de educación primaria.

Nilsson (2014) destaca que uno de los desafíos en la enseñanza de la probabilidad es que, para comparar y ver la relación entre la probabilidad teórica y su estimación empírica, los estudiantes necesitan desarrollar una comprensión de la relación parte-todo y deben iniciarse en la experimentación con una buena comprensión de proporciones y porcentajes. Este autor advierte también que la conexión entre ambos enfoques de la probabilidad representa otro desafío conceptual para muchos estudiantes, pues argumenta que se presentan errores en los materiales curriculares sobre el tema, como definir “probabilidad experimental” (un concepto que no existe en matemáticas).

Las investigaciones mencionadas dan cuenta de las dificultades que los estudiantes presentan en el estudio de los enfoques frecuencial y clásico de la probabilidad y de la conexión entre ambos. En esta investigación se propuso implementar una secuencia didáctica para determinar si los juegos de azar ayudan al alumno en el aprendizaje de los enfoques señalados.

Consideraciones conceptuales

El origen de la teoría de la probabilidad se remonta al análisis de los juegos de azar. Los primeros esfuerzos por formalizar la probabilidad y desarrollar una teoría se atribuyen a Pascal y Fermat, quienes resolvieron ciertos problemas utilizando la probabilidad de manera implícita, sin llegar a definirla explícitamente. El concepto de probabilidad ha sido interpretado de distintas maneras a lo largo del tiempo, destacándose principalmente los enfoques clásico y frecuencial como dos de los más importantes.

El enfoque clásico se basa en la suposición implícita de que cada resultado del espacio muestral tiene la misma probabilidad. Es un enfoque a priori de la probabilidad, ya que permite calcular probabilidades antes de realizar cualquier ensayo. Como ha sido señalado por Batanero et al. (2021), fue Laplace quien introdujo el cálculo de la probabilidad como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el de casos posibles. Una debilidad del enfoque clásico, que ha motivado a algunos autores a proponer el enfoque frecuencial como alternativa, es que

solo resulta aplicable a situaciones en las que el espacio muestral es equiprobable. Más allá de contextos de juegos, son muy pocas las situaciones naturales o sociales que pueden representarse de manera razonable bajo esta condición (Sánchez, 2009).

El enfoque frecuencial se fundamenta en la Ley de los Grandes Números y concibe la probabilidad de un evento como una estimación obtenida a partir de las frecuencias relativas de los resultados favorables en un experimento aleatorio repetido muchas veces bajo condiciones similares. Gómez et al. (2015) definen este enfoque como un “valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo” (p. 75); se admite la existencia de dicho límite y la frecuencia relativa representa una aproximación al valor teórico de probabilidad. No obstante, Vásquez y Alsina (2015) argumentan que este enfoque presenta limitaciones, como la necesidad de realizar un número infinito de repeticiones bajo condiciones idénticas, la obtención de valores aproximados en lugar de valores exactos y la falta de claridad sobre la cantidad necesaria de repeticiones para lograr una aproximación precisa.

Método

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo. Se trabajó con un grupo de 20 estudiantes de una escuela secundaria de la Ciudad de México. La secuencia didáctica se implementó en cinco sesiones de 50 minutos cada una y está relacionada con el Proceso de Desarrollo de Aprendizaje de primer grado: *Identifica eventos en los que interviene el azar, determina el espacio muestral y experimenta* (Secretaría de Educación Pública, 2022). Las actividades fueron diseñadas con la intención de que los alumnos aprendieran los enfoques clásico y frecuencial, además de otros conceptos básicos de probabilidad (azar, espacio muestral y frecuencia relativa) y para ello se utilizó el contexto de los juegos de azar.

Los instrumentos para la recolección de datos que fueron considerados en la investigación son:

- *Diario de clase*: utilizado en cada sesión como instrumento para registrar de forma sistemática lo observado en el aula durante la implementación de la secuencia didáctica.
- *Hojas de trabajo*: utilizadas durante las cinco sesiones, en ellas se incluyeron actividades diseñadas para el estudio de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.
- *Cuestionarios de exploración*: se aplicó un cuestionario de exploración inicial, antes de implementar la secuencia didáctica, para conocer los conocimientos previos de los alumnos, y otro de exploración final para evaluar lo aprendido tras su implementación.

Los datos obtenidos de la aplicación de los cuestionarios de exploración inicial y final y de las actividades implementadas durante el desarrollo de las sesiones fueron analizados, con atención a las intuiciones y conocimientos expresados por los estudiantes en sus respuestas sobre los enfoques frecuencial y clásico y sobre otras nociones básicas de la probabilidad.

Para asegurar la validez del proceso de investigación, se llevó a cabo la triangulación de datos, ya que se verificó y se comparó la información obtenida en diferentes momentos (al inicio, durante y al término de la implementación de la propuesta didáctica) mediante distintos métodos (cuestionarios, observación participante y análisis de las actividades en las hojas de trabajo). A través de ellos se pudo analizar la evolución de los estudiantes en el aprendizaje de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

Diseño e implementación de la secuencia didáctica

A partir de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario de exploración inicial, se diseñó una secuencia didáctica con el propósito de favorecer el aprendizaje de las nociones básicas de la probabilidad, de tal manera que los estudiantes superaran las dificultades identificadas en dicho cuestionario. La secuencia diseñada incluyó actividades basadas en el uso de juegos de azar, como monedas, dados, ruleta y urna, con el fin de estimular el interés y la participación del alumnado. En la Tabla 1 se presentan las sesiones, sus objetivos y las actividades realizadas durante la implementación de la propuesta didáctica.

Tabla 1

Sesiones desarrolladas con sus respectivos objetivos y actividades

Sesión	Objetivo de la sesión	Actividades realizadas
Sesión 1 Juegos de azar	Que los estudiantes identifiquen juegos que dependen y los que no del azar	- Preguntas detonadoras: <i>¿alguna vez han jugado un juego que dependa del azar?, ¿cómo saben que estos juegos son de azar?</i> - Clasificar en una tabla juegos que dependen y los que no del azar
Sesión 2 Lanzamiento de monedas	Que los estudiantes utilicen el enfoque frecuencial y lo vinculen con la probabilidad clásica mediante el lanzamiento de monedas Aplicación de la regla de Laplace	- Pregunta detonadora: <i>Si lanzo una moneda, ¿qué crees que saldrá: sol o águila?</i> - Lanzamiento de monedas, registro de los resultados en una tabla de frecuencias y cálculo de frecuencias relativas - Uso de la regla de Laplace para obtener la probabilidad clásica - Comparación de resultados entre la probabilidad frecuencial y clásica

Tabla 1
Sesiones desarrolladas con sus respectivos objetivos y actividades (continúa)

Sesión	Objetivo de la sesión	Actividades realizadas
Sesión 3 Lanzamiento de dados	Que los estudiantes utilicen el enfoque frecuencial y lo vinculen con la probabilidad clásica mediante el lanzamiento de un par de dados Obtención del espacio muestral Aplicación de la regla de Laplace	- Juego de carrera de caballos con el lanzamiento de un par de dados, suma de los puntos de los dados de ambas caras, registro en una tabla de frecuencias y cálculo de las frecuencias relativas - Obtención de todos los resultados al lanzar un par de dados (espacio muestral) - Uso de la regla de Laplace para obtener la probabilidad clásica - Comparación de resultados entre la probabilidad frecuencial y clásica
Sesión 4 Uso de la ruleta	Que los estudiantes utilicen el enfoque clásico para la toma de decisiones y vinculen dicho enfoque con la probabilidad frecuencial mediante el juego de la ruleta	- Obtención de la probabilidad teórica para la toma de decisiones sobre qué casilla tiene mayor probabilidad de caer al girar la ruleta. - Realización de la experiencia aleatoria con el uso de la ruleta y registro en una tabla de frecuencias - Obtención del espacio muestral - Comparación de resultados entre la probabilidad teórica y frecuencial
Sesión 5 Uso de la urna	Que los estudiantes utilicen el enfoque clásico para la toma de decisiones y vinculen dicho enfoque con la probabilidad frecuencial en el contexto de la urna	- Obtención de la probabilidad teórica para la toma de decisiones y elegir la opción con mayor probabilidad en el contexto de la urna - Realización de la experiencia aleatoria con el uso de la urna y registro en una tabla de frecuencias - Obtención del espacio muestral en el contexto de la urna - Comparación de resultados entre la probabilidad teórica y frecuencial

Resultados

Se analizan las respuestas de los estudiantes en los cuestionarios inicial (CI) y final (CF) y en las actividades de la intervención didáctica.

Cuestionarios

Mediante los cuestionarios, se pudo indagar en los conocimientos de los estudiantes para determinar la probabilidad de ocurrencia de eventos específicos, identificar el espacio muestral y reconocer situaciones aleatorias. En la Tabla 2 se presentan los porcentajes de respuestas correctas de ambos cuestionarios. Es importante señalar que el cuestionario final es una versión modificada del cuestionario inicial, ya que se omitió el primer reactivo, pues este incluye una situación de conteo que constituye un conocimiento previo necesario para que los estudiantes obtengan el espacio muestral. No obstante, en el cuestionario final ya no fue necesario, pues los alumnos ya habían estudiado dicho espacio muestral.

Tabla 2*Porcentajes de respuestas correctas en el CI y CF*

Reactivo	% de respuestas correctas en el CI	% de respuestas correctas en el CF
1. Marlen almuerza en el restaurante de su trabajo de lunes a viernes. Puede elegir entre dos opciones de entrada: sopa o arroz y tres opciones de plato fuerte: milanesa con ensalada (M), enchiladas suizas (E) y alambre (A). ¿Cuántos menús distintos puede seleccionar?	30%	
2. Si se lanza un dado numerado del 1 al 6, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 2?	0%	90%
3. Si lanzas dos dados comunes (numerados del 1 al 6) ¿cuáles son todos los posibles resultados que puedes obtener en este experimento?	0%	80%
4. ¿Puedes saber, antes de tirar los dados, qué número saldrá? Explica tu respuesta.	5%	100%
5. Si lanzas tres monedas al aire al mismo tiempo, ¿cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener?	0%	70%
6. Si tú y 3 amigos lanzan las tres monedas simultáneamente, ¿es seguro que todas caigan sol? ¿Por qué?	40%	100%
7. Se ponen en una bolsa oscura seis canicas de diferente color 3 rojas, 2 verdes y una blanca, todas son de igual tamaño. Si metes la mano a la bolsa ¿qué color de canica tiene más probabilidad de salir?	100%	100%

Los resultados del CI muestran que, en el primer reactivo, los estudiantes tuvieron dificultades para obtener todas las combinaciones posibles en un problema de conteo, pues solo el 30% pudo seleccionar todos los menús distintos del restaurante. En el reactivo 2, relacionado con el lanzamiento de un dado, ningún alumno obtuvo la probabilidad de que saliera el número 2. En las respuestas, 12 estudiantes anotaron que había poca probabilidad de que cayera ese número y otros 3 escribieron porcentajes, pero estos fueron erróneos. El resto no respondió el reactivo.

En los reactivos 3 y 5, en los que se debía obtener el espacio muestral, ningún alumno pudo hacerlo; sin embargo, 12 anotaron algunos de los posibles resultados, pero no el total, y el resto no registró ninguna respuesta. El 40% identificaron en el reactivo 6 un evento aleatorio, pues respondieron que no se sabe qué sucederá si cae sol o águila. Algunas respuestas incorrectas fueron: “E2: Depende de la rapidez o la delicadeza con que se lancen las monedas”, “E14: Depende de qué lado se lancen”.

En las respuestas erróneas de los estudiantes se observó que están presentes ideas subjetivas o intuitivas, basadas en opiniones personales, más

que en ideas formales para estimar la probabilidad de un evento. Por último, en el reactivo 7, todos los estudiantes acertaron al decir que, si meten la mano a la bolsa, hay una mayor probabilidad de sacar una canica roja.

A continuación se describe el desarrollo de las sesiones realizadas durante la implementación de la propuesta didáctica.

Sesión 1. Juegos de azar

La clase comenzó con una breve charla para explorar los conocimientos previos de los alumnos. La docente planteó dos preguntas: ¿Alguna vez han jugado un juego que dependa del azar? ¿Cómo saben que estos juegos son de azar? A la primera pregunta, todos los estudiantes respondieron afirmativamente y mencionaron ejemplos como la lotería, UNO, canicas en la feria y monedas, entre otros. En la segunda, todos los estudiantes coincidieron en que estos juegos “dependen de la suerte”. Posteriormente, entre todos los estudiantes, se clasificaron en una tabla elaborada en el pizarrón los juegos mencionados, como aquellos que dependen y los que no del azar.

Sesión 2. Lanzamiento de monedas

Se llevó a cabo una actividad de lanzamiento de monedas; para ello se preguntó a los estudiantes: *Si lanzo una moneda, ¿qué crees que saldrá: sol o águila?* A esta pregunta, 30% respondió acertadamente, argumentando: “no se puede saber lo que sucederá”; 35% recurrió a expresiones que reflejan una comprensión basada en intuiciones personales más que en criterios formales, por ejemplo: “E1: Depende de la suerte”, “E2: Seguro que sale más veces sol porque así me pasa siempre”, “E3: Sale la mayoría águila”. El resto no registró ninguna respuesta.

Posteriormente, se organizó a los alumnos en equipos para lanzar la moneda 10 veces, con el propósito de introducir el concepto de probabilidad frecuencial y vincular la experiencia con la noción de probabilidad clásica. A cada estudiante se le entregó una hoja de trabajo en la que debía registrar los resultados de sus lanzamientos. Después de realizar la experiencia aleatoria, los alumnos respondieron tres preguntas para que reflexionaran sobre los resultados del lanzamiento de las monedas: a) *¿cuántas águilas cayeron por jugador?* b) *¿cuántos soles cayeron por jugador?* y c) *si realizan 2 rondas más, ¿creen que obtendrían los mismos resultados?* Aunque los valores de los soles y de las águilas que cayeron al lanzar la moneda variaron entre los equipos, en la tercera pregunta todos los estudiantes coincidieron en que obtendrían resultados similares si lanzaran la moneda 10 veces en 2 rondas más. Enseguida se solicitó a los equipos que repitieran la experiencia dos veces más, de modo que cada alumno

completara un total de tres rondas de lanzamientos. Después de concluidas las tres rondas, la docente preguntó: *¿cuántos soles obtuvieron en total?* Algunas respuestas fueron las siguientes: “E1: De los 30 lanzamientos yo obtuve 21 veces sol” y “E2: Yo obtuve 13 soles”. Con estas respuestas los estudiantes pudieron notar que, aunque todos realizaron el mismo número de lanzamientos, los resultados no fueron idénticos, lo que evidenció la naturaleza impredecible del experimento.

En el pizarrón se anotó el número de veces que cayeron sol y águila de cada equipo y, posteriormente, se sumaron dichos valores. Después, la docente introdujo el concepto de frecuencia relativa. Para ello, solicitó a los estudiantes que elaboraran una tabla en la que dividieran el número de veces en que ocurrió un evento entre el número total de resultados obtenidos en la experiencia aleatoria. Los estudiantes debían obtener la frecuencia relativa para 10, 50, 100 y 600 lanzamientos, los cuales se realizaron en equipo (10 lanzamientos), o bien se sumaron los obtenidos de algunos o de todos los equipos (50, 100 y 600 lanzamientos), y se anotaron en el pizarrón. En la Figura 1 se muestra la tabla elaborada por el E17, en la que se obtienen correctamente valores decimales de las frecuencias relativas. Cabe señalar que ninguno de los estudiantes tuvo dificultades para expresar dichas frecuencias en forma decimal.

Figura 1

Tabla de frecuencias relativas elaborada por E17 en el lanzamiento de monedas

Número de lanzamientos	Número de veces que cayó sol	Frecuencia relativa	Número de veces que cayó águila	Frecuencia relativa
10	2	$\frac{2}{10} = 0.2$	8	$\frac{8}{10} = 0.8$
50	33	$\frac{33}{50} = 0.66$	17	$\frac{17}{50} = 0.34$
100	39	$\frac{39}{100} = 0.39$	58	$\frac{58}{100} = 0.58$
600	309	$\frac{309}{600} = 0.515$	291	$\frac{291}{600} = 0.485$

Con respecto a esta tabla, la docente preguntó: *¿qué observan en estos valores? ¿Cómo es la cantidad de soles que cayeron con respecto a las águilas en cada caso?* Algunas respuestas fueron: “E17: Con 10 lanzamientos nosotros obtuvimos 2 soles”, “E12: De los 600 lanzamientos que hicimos entre todo el grupo, 309 cayeron sol y 291 cayeron águila”. El resto de los estudiantes dio respuestas similares.

Enseguida, la docente presentó la regla de Laplace como una fórmula fundamental de la probabilidad teórica, aplicable cuando todos los sucesos

de un experimento son equiprobables. Posteriormente, planteó algunas preguntas que fueron respondidas por los estudiantes como sigue:

Docente: *¿cuántos posibles resultados hay al lanzar una moneda?*

E11: *La moneda sólo puede caer águila o sol*

Docente: *Si utilizan la regla de Laplace para obtener la probabilidad de que al lanzar la moneda caiga sol, ¿cómo quedaría?*

E7: *Según yo sería: la probabilidad de que salga sol es igual a 1 entre 2.*

Docente: *Es correcto, y si un medio lo expresamos en decimal, ¿cómo quedaría?*

E7: *Pues creo que se divide 1 entre 2 y queda cero punto 5*

El resto de los estudiantes estuvo de acuerdo con esas respuestas, por lo que la docente solicitó que compararan este valor (0.5) con los valores de la frecuencia relativa cuando cayó sol. Algunos estudiantes dieron las siguientes respuestas: “E6: Los valores de la tabla también son decimales como 0.5”, “E5: Los valores de las frecuencias relativas son un poquito más grandes o un poquito más pequeños que 0.5, pero el valor más cercano es 0.515”. Estas respuestas reflejan que los estudiantes perciben que se trata de valores similares.

La intención de la docente en esta actividad era que los estudiantes observaran que la probabilidad teórica sugiere un resultado equitativo (50%-50%), pero que en la práctica los resultados pueden variar y que, entre más lanzamientos se realicen, nos acercamos más a esos valores.

Sesión 3. Lanzamiento de dados

En esta sesión se realizó la actividad “carrera de caballos”. Para la actividad, se formaron equipos y se repartió a cada estudiante un tablero de carrera de caballos y un par de dados. Se explicó que en la carrera participan 12 caballos numerados del 1 al 12 y se dijo que, antes de empezar el juego, debían apostar por un caballo en el que consideraban que podían ganar. Por turnos, los alumnos debían lanzar dos dados, sumar los puntos de cada uno y el caballo con ese número de puntos avanzaba una casilla, que debían registrar con una marca en la tabla. Gana el caballo que llegue primero a la meta. Antes de iniciar el juego, la docente preguntó: *¿a cuál caballo crees que debes apostar? y ¿por qué?* El E5 respondió: “Yo al 5, porque es mi número de la suerte”.

Otros tres estudiantes dijeron que elegían ese número porque sentían que con ese podían ganar. Después de que se llevó a cabo el juego con el lanzamiento de dados, hubo un caballo ganador y la docente planteó otras preguntas que fueron respondidas por los estudiantes como sigue:

Docente: *¿Volverían a apostar por el mismo caballo? ¿Por qué?*

E8: *No porque casi no salió el 10*

Docente: *¿A qué caballo no apostarían? ¿Por qué?*

E1: *Al 1 porque nunca sale*

Docente: *¿Creen que hay un caballo que tenga mayor probabilidad de ganar?*

E4: *Vi que los números que más salieron fueron el 7 y 8 pero como salió más el 8 voy a elegir ese*

Todos los estudiantes coincidieron en que no apostarían al 1, porque la menor suma de puntos que se puede obtener es 2, y 12 alumnos señalaron que les convendría apostar al 6, 7, 8 o 9 porque se dieron cuenta de que son las sumas de números que aparecen con mayor frecuencia. Posteriormente, se pidió que llevaran a cabo dos juegos más de lanzamiento de dados, que registraran en la tabla las sumas obtenidas y que calcularan la frecuencia relativa de cada número en el total de lanzamientos. En la Figura 2 se presenta la tabla que completó el E9, en la que obtuvo correctamente las frecuencias relativas de los resultados al lanzar los dados.

Figura 2

Tabla de frecuencias relativas elaborada por el E9 en el juego de carrera de caballos

Número de caballo	Número de veces que la suma de los dados cayó ese número	Frecuencia relativa
1	0	
2	3	$\frac{3}{186} = 0.016$
3	12	$\frac{12}{186} = 0.064$
4	13	$\frac{13}{186} = 0.069$
5	20	$\frac{20}{186} = 0.107$
6	25	$\frac{25}{186} = 0.134$
7	32	$\frac{32}{186} = 0.172$
8	25	$\frac{25}{186} = 0.134$
9	21	$\frac{21}{186} = 0.112$
10	17	$\frac{17}{186} = 0.091$
11	14	$\frac{14}{186} = 0.075$
12	4	$\frac{4}{186} = 0.021$
Total de lanzamientos:		186

Después de que los alumnos completaron la tabla anterior, la docente solicitó que obtuvieran el espacio muestral del lanzamiento de un par de dados y que calcularan la probabilidad teórica de que saliera cada suma de números; esto, con la intención de que se dieran cuenta a cuál caballo conviene más apostar; un ejemplo de ello es el trabajo del E7 (Figura 3), quien obtuvo correctamente todos los valores. Es importante señalar que ningún estudiante tuvo dificultades al realizar esta tarea.

Figura 3

Respuestas del E7 sobre el espacio muestral del lanzamiento de un par de dados

Suma	Casos
2	(1,1) $P(2) = \frac{1}{36} = 0.027$
3	(1,2)(2,1) $P(3) = \frac{2}{36} = 0.055$
4	(1,3)(3,1)(2,2) $P(4) = \frac{3}{36} = 0.083$
5	(2,3)(3,2)(4,1)(1,4) $P(5) = \frac{4}{36} = 0.111$
6	(3,3)(4,2)(2,4)(5,1)(1,5) $P(6) = \frac{5}{36} = 0.138$
7	(3,4)(4,3)(1,6)(6,1)(5,2)(2,5) $P(7) = \frac{6}{36} = 0.166$
8	(4,4)(6,2)(2,6)(5,3)(3,5) $P(8) = \frac{5}{36} = 0.138$
9	(3,6)(6,3)(5,4)(4,5) $P(9) = \frac{4}{36} = 0.111$
10	(5,5)(6,4)(4,6) $P(10) = \frac{3}{36} = 0.083$
11	(5,6)(6,5) $P(11) = \frac{2}{36} = 0.055$
12	(6,6) $P(12) = \frac{1}{36} = 0.027$

Después de lo anterior, la docente planteó otras preguntas con la intención de que los estudiantes compararan los valores de las frecuencias relativas con los valores de la probabilidad teórica del lanzamiento del par de dados y para verificar que todos obtuvieran correctamente el espacio muestral, y además, que indicaran las distintas formas en que pueden caer los dados para que la suma de los puntos de los dados sea 3 y cuál número tiene mayor probabilidad de caer. En ese sentido, se llevó a cabo la siguiente interacción entre la docente y los estudiantes.

Docente: ¿Cómo son los valores de las frecuencias relativas con respecto a los valores que obtuvieron utilizando la regla de Laplace?

E14: Pues se parecen un poco

Docente: Al lanzar los dados, ¿de cuántas maneras diferentes es posible que caigan?

E18: Yo conté que son 36

E2: Yo también digo que son 36

Docente: Correcto. Ahora, si la suma de los dados es igual a 3 ¿de cuántas maneras pueden caer ambos dados?

E15: De 2 distintas maneras, 1+2 y 2+1

Docente: ¿Cuál número tiene mayor probabilidad de caer?

E7: Según yo es el 7

E11: Cuando lanzamos los dados los números que más salieron fueron el 6, 7, 8 y 9 pero cuando obtuvimos el espacio muestral vi que el que es más probable que salga es el 7.

Mediante las preguntas anteriores, todos los estudiantes pudieron darse cuenta de que, al lanzar los dados, la suma de 7 tiene mayor probabilidad de salir. En esta actividad se definió el espacio muestral como el conjunto de todos los resultados posibles de una experiencia aleatoria. Es importante señalar que, al igual que en la actividad de la sesión 2, los estudiantes

pudieron concluir que, cuando el experimento se repite muchas veces, el valor de la probabilidad frecuencial se aproxima al de la probabilidad teórica.

Sesiones 4 y 5. Ruleta y urna

En estas sesiones, la intención era que los estudiantes anticiparan los resultados mediante el uso de la probabilidad teórica, de tal forma que les ayudara a tomar decisiones sobre la opción que conviene elegir antes de realizar la experiencia aleatoria. Para ello, se utilizaron la ruleta y la urna. El trabajo con la ruleta se llevó a cabo mediante una historieta que ejemplifica un caso en el que es posible aplicar la probabilidad teórica antes de realizar la experiencia aleatoria; se repartió una historieta de tres páginas. Para su lectura, se pidió la participación de dos estudiantes, quienes interpretaron a los personajes y leyeron los diálogos en voz alta. La historia comienza cuando Dani necesita reunir 300 pesos para seguir disfrutando de la feria. Antes de girar una ruleta para intentar ganar dinero, se pregunta si se podrá obtener esa cantidad, lo que da pie a utilizar el concepto de probabilidad teórica como herramienta útil para tomar decisiones informadas. Con respecto a esta narrativa, la docente preguntó: *¿cuál es la probabilidad de que Dani obtuviera los 300 pesos?*, algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes fueron: “E2: Viendo la ruleta puedo decir que hay 12 casos favorables de un total de 16”, “E7: Se puede decir que Dani tiene mucha probabilidad de ganar 300 o más porque hay varias cantidades que son mayores o iguales que 300”.

Los alumnos identificaron el número de casos posibles en una ruleta con cantidades monetarias. La intención era que comprendieran que no solo las casillas con la cantidad exacta de \$300 representaban casos favorables, sino también las que contenían montos superiores. En la realización de esta actividad, todos los estudiantes dieron una respuesta correcta utilizando la probabilidad teórica, y se pudo concluir que, para calcular esta probabilidad, no es necesario llevar a cabo el experimento —como ocurre en la probabilidad frecuencial—, sino que basta con conocer dos datos: el conjunto total de resultados posibles en una situación aleatoria y el número de resultados que favorecen al evento en cuestión.

Con el uso de la urna, los estudiantes también pudieron utilizar la probabilidad teórica para la toma de decisiones al predecir qué canica tiene mayor probabilidad de salir al meter la mano en una urna, de tal forma que, al llevar a cabo la experiencia, el 60% acertó en sus predicciones. Cabe destacar que durante la experiencia los estudiantes registraron los datos en una tabla de frecuencias, obtuvieron el espacio muestral y compararon los resultados entre la probabilidad teórica y la frecuencial. Con esta actividad

quedó claro para los estudiantes que la decisión que tomen, apoyados en el uso de la probabilidad clásica, no es la que ocurrirá si se realiza la experiencia, sino la más probable.

En los resultados del CF se observó que todos los estudiantes evolucionaron satisfactoriamente (Tabla 2), pues de los 20 estudiantes, 18 resolvieron correctamente el 85% de los reactivos, mientras que los otros 2 resolvieron acertadamente solo el 40%, debido a su asistencia poco regular durante la implementación de la propuesta didáctica. Cabe señalar que en este cuestionario, 5 de los 20 estudiantes no pudieron obtener la totalidad del espacio muestral, lo que sugiere la necesidad de plantear más actividades que permitan obtener todos los resultados posibles en una experiencia aleatoria.

Algunas diferencias entre los resultados del CI y del CF se ilustran en las respuestas a los reactivos 2 y 4. En el reactivo 2 se preguntó: *si se lanza un dado numerado del 1 al 6, ¿qué probabilidad hay de que salga el número 2?* El 90% lo respondió correctamente, expresando la probabilidad como una fracción; en el CI, ninguno de los estudiantes pudo resolverlo. En el reactivo 4 se preguntó: *¿puedes saber, antes de tirar un par de dados, qué número saldrá?* Todos los estudiantes anotaron que no se puede saber qué número saldrá, lo cual es correcto, por lo que pudieron darse cuenta de que se trataba de un evento aleatorio cuyo resultado no puede predecirse con certeza. En el CI, los estudiantes dieron respuestas como: “Si se lanzan de una forma horizontal y lenta, sí se puede saber”.

Estos resultados permitieron observar cómo los estudiantes de primer grado de secundaria pasaron de tener concepciones intuitivas, subjetivas y erróneas sobre algunas situaciones de probabilidad a desarrollar ideas más formales y estructuradas mediante el uso de dados, monedas, urnas y ruletas.

Es importante señalar que durante la implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo una evaluación formativa, apoyada en un proceso continuo y sistemático de evaluación del aprendizaje de los estudiantes, de modo que se monitoreó el progreso de cada uno y se proporcionó retroalimentación inmediata.

Consideraciones finales

Los resultados muestran que los estudiantes comprenden los conceptos de probabilidad teórica, probabilidad frecuencial, frecuencia relativa y espacio muestral de una experiencia aleatoria cuando se trabajan mediante situaciones que involucran juegos de azar.

En las sesiones 2 y 3, cuando se trabajó con el uso de monedas y dados, los estudiantes pudieron obtener la probabilidad de un evento a partir de las frecuencias relativas de los resultados favorables, y se concluyó que, al

incrementarse las repeticiones en una experiencia aleatoria, el valor de la frecuencia relativa se aproxima al de la probabilidad teórica. Con el uso de la ruleta y la urna, en las que utilizaron la probabilidad clásica para la toma de decisiones, los estudiantes comprendieron que dicha probabilidad clásica sirve como referencia para la toma de decisiones probabilísticas, pero no decide por sí misma. Es decir, proporciona información útil para elegir, aunque nunca determina cuál es la mejor opción; únicamente indica qué es lo más probable que ocurra.

Entre los hallazgos más relevantes, destaca que en el CF se observó un mejor conocimiento para estimar la probabilidad de que ocurran determinados eventos, identificar el espacio muestral, identificar situaciones aleatorias y argumentar respuestas más fundamentadas en los conocimientos probabilísticos adquiridos durante el desarrollo de la secuencia didáctica. Por parte de la docente, se adquirió una visión más amplia sobre la enseñanza de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, reconociendo la necesidad de implementar juegos de azar que promuevan el análisis y la reflexión de los estudiantes.

Referencias

- Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R., & Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Prospective mathematics teachers understanding of classical and frequentist probability. *Mathematics*, 9(19), 2526. <https://doi.org/10.3390/math9192526>
- Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 75–99). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_4
- Gómez, E., Contreras, J. M., & Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández-Verdú, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 73–87). SEIEM.
- Martínez, S. A., & Sánchez, E. A. (2021). Análisis de las intuiciones y conocimientos sobre probabilidad de estudiantes de bachillerato. *PARADIGMA*, 41(e1), 342–369. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p342-369.id1028>
- Nilsson, P. (2014). Experimentation in probability teaching and learning. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 509–532). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_28

- Provost, A., Lim, S. S., York, T., & Panorkou, N. (2022). Bridging frequentist and classical probability through design. En A. E. Lischka, E. B. Dyer, R. S. Jones, J. N. Lovett, J. Strayer, & S. Drown (Eds.), *Proceedings of the forty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1548–1556). Middle Tennessee State University. <https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2044%202022%20Proceedings.pdf>
- Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática*, 21(2), 39–77.
- Secretaría de Educación Pública. (2022). *Programa de estudio para la educación secundaria: Programa Sintético de la Fase 6*. SEP. <https://www.sev.gob.mx/educacion-basica/secundaria/consejo-tecnico-escolar-2025-2026/cte-sesion1/programa-sintetico-secundaria-fase-6/>
- Vásquez, C., & Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: Situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 19(2), 441–462.