



Razonamiento geométrico en una tarea de isometrías

Geometric Reasoning in an Isometries Task

Ángel Colín  | angelenrique.sanchez@uca.es
Universidad de Cádiz, España

Rafael Ramírez  | rramirez@ugr.es
Universidad de Granada, España

Recepción: 17 de octubre de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

En este trabajo se analizan los niveles de Van Hiele que presentaron 14 estudiantes del máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, España. Durante el estudio se realizó una tarea con mosaicos geométricos creados mediante transformaciones de un elemento generador. La finalidad de esta tarea fue proporcionar a los participantes herramientas para el desarrollo de competencias matemáticas que se relacionan con la geometría, el dibujo y los elementos artísticos. Se utilizó una propuesta del modelo de Van Hiele aplicada exclusivamente a las isometrías planas. Los resultados mostraron que la tarea favoreció que tres sujetos manifestaran características propias del Nivel 4, asociadas con la categoría de visión global de las isometrías. El resto de los participantes manifestó características propias de los niveles 1, 2 y 3, que se asocian con el reconocimiento estático y dinámico de las figuras, con el descubrimiento experimental de nuevos elementos geométricos y con la deducción, definición y descomposición de las isometrías, respectivamente.

Palabras clave

formación de profesorado, razonamiento geométrico, isometrías, teselaciones

Abstract

This paper analyses the Van Hiele levels presented by 14 students of the Master degree research in Mathematics Education at University of Granada, Spain. During the study a task was carried out with geometric mosaics created by transformations of a generating element. The purpose of this task was to instruct the students providing them with tools for the development of mathematical competences related to geometry, drawing and artistic elements. A proposal of the Van Hiele model applied to planar isometries exclusively was used. The results shown that the task favoured that three students to manifest characteristics of level 4 associated with the category of global insight of isometries. The rest of participants manifested characteristics of levels 1, 2 and 3, which are associated with the static and dynamic recognition of figures, with the experimental discovery of new geometric elements and with deduction, definition and decomposition of isometries, respectively.

Keywords

Prospective teachers, geometric reasoning, isometries, tessellations

Introducción

Hace veinticinco años que en los principios y estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000) se establecieron programas de capacitación en todos los niveles educativos, que abarcan la visualización espacial, el razonamiento geométrico, la aplicación de transformaciones geométricas, el uso de simetrías y la modelización geométrica. Su finalidad es que los alumnos desarrollen autonomía propia para analizar situaciones matemáticas y resolver problemas de la vida real. Esto no solo debería quedar circunscrito a la educación básica obligatoria, sino que podría extenderse hacia los programas universitarios, incluso hasta los estudios de posgrado, especialmente en aquellos que están relacionados con la formación de futuros docentes o con la investigación en didáctica de las matemáticas. Para conseguirlo, es necesario proponer tareas que conduzcan al desarrollo y análisis de habilidades que proporcionan un mayor significado a los objetos geométricos en el estudiantado de nivel superior, enmarcadas en un modelo educativo orientado hacia las nuevas directrices curriculares actuales del sentido espacial.

Fernández (2013) ha resaltado la importancia de la relación que existe entre la visualización espacial y el aprendizaje de la geometría. En la visualización espacial, las figuras, formas e imágenes juegan un papel muy importante en los procesos para manipularlas en el plano o en el espacio, y en la habilidad para crearlas, imaginarlas y procesarlas. En términos generales, la visualización espacial puede ser considerada como un proceso de construcción de imágenes mentales o físicas, asociadas a conceptos u

objetos, con el fin de conducir a los sujetos hacia la comprensión de las matemáticas empleadas en su aprendizaje. Como un ejemplo, la rotación de imágenes mentales y su perspectiva, así como las transformaciones relacionadas con las simetrías, permiten crear conexiones entre la capacidad espacial y el pensamiento geométrico.

Diversos autores han demostrado que es posible despertar el interés en el aprendizaje mediante el uso y aplicación de recubrimientos en el plano, como ocurre al estudiar la obra gráfica del artista M. C. Escher, o al analizar los mosaicos geométricos decorativos que se encuentran en los palacios árabes de tipo islámico-nazaríes (Lyublinskaya & Cabral, 2023; Morales & Rubio, 2020; Mutlu, 2025). El enfoque didáctico que propusieron estos autores resulta pertinente para la formación de futuros docentes como a profesores que se encuentran en servicio y para enseñar los movimientos y transformaciones en el plano durante las prácticas educativas. Además, permite desarrollar las competencias matemáticas asociadas con la geometría y el conocimiento teórico, como pueden ser: los conceptos geométricos, crear conexiones matemáticas con elementos artísticos y despertar el interés en otras culturas. Para ello, se pueden diseñar tareas con potencial para indagar sobre el razonamiento geométrico que se espera obtener por parte de los docentes que se encuentra en etapa inicial de formación.

Las tareas como fundamentos para el aprendizaje pueden ser resueltas, transformadas y modificadas desde una perspectiva cognitiva, cultural o práctica, incluso pueden ser diseñadas con aspectos multidisciplinares para contribuir al incremento de la motivación y el aprendizaje significativo al abordar aspectos científicos, artísticos y culturales. En este sentido, se consideró de interés caracterizar una tarea que fue aplicada durante un estudio piloto con 14 estudiantes del máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas que se imparte en la Universidad de Granada, España. La finalidad de esta tarea fue instruir al estudiantado proporcionándoles herramientas para el desarrollo de competencias matemáticas que se relacionan con la geometría, el dibujo y los elementos artísticos.

Marco teórico

El modelo de Van Hiele (1986) ha sido hasta ahora uno de los más estudiados en los programas de formación de profesorado y en la investigación en Didáctica de la Matemática. En este modelo se establece que el razonamiento geométrico de una persona puede incrementarse paulatinamente al superar cada uno de los cinco niveles de aprendizaje que lo constituyen, desde el Nivel 1 (visualización) hasta el Nivel 5 (rigor). El Nivel 5, en principio, solamente puede ser alcanzado por especialistas en

matemáticas. No obstante, estudios recientes han propuesto nuevas metodologías para que pueda ser alcanzado por quienes hayan superado el Nivel 4 (Arnal-Bailera & Manero, 2024).

El modelo de Van Hiele es aplicable en diversas prácticas educativas. En los últimos años se ha utilizado para conocer el razonamiento geométrico del profesorado en formación (Övez & Özdemir, 2024), para medir el conocimiento geométrico que necesitan sobre la enseñanza de las propiedades y características de las formas y figuras (Yi et al., 2022), para conocer su capacidad en las demostraciones geométricas (Arnal-Bailera & Manero, 2021), para entender y describir el concepto de similitud de las formas en el ámbito de la geometría Euclidiana (Mbatha & Bansilal, 2023) e, incluso, para aplicar métodos sofisticados que permiten conocer la respuesta cognitiva de un sujeto mediante el seguimiento ocular (Ghorbani et al., 2024). Sin embargo, no es un modelo que se haya utilizado específicamente en la geometría de las transformaciones, las cuales desempeñan un papel relevante en las habilidades que un sujeto necesita para formar imágenes mentales, transformarlas y manipularlas en su mente. Por ejemplo, con las simetrías rotatorias se pueden desarrollar habilidades de visualización y orientación espacial.

Para los propósitos de este estudio se utilizó una propuesta que permite aplicar el modelo de Van Hiele particularmente a las isometrías en el plano (Jaime & Gutiérrez, 1989). En dicha propuesta (traducida del documento original en inglés para facilitar la lectura e ilustrar este trabajo) se consideraron únicamente cuatro niveles, jerarquizados de la siguiente manera:

Nivel 1

- a) Identificación visual de traslaciones, rotaciones y simetrías estáticas
- b) Reconocimiento estático. Identificación de figuras isométricas
- c) Reconocimiento dinámico (movimiento realizado automáticamente)

Nivel 2

- a) Descubrimiento experimental de elementos /propiedades de isometrías

Nivel 3

- a) Deducción experimental de relaciones y propiedades de las isometrías
- b) Justificación de propiedades y relaciones ya conocidas
- c) Definición formal de traslación, rotación y simetría
- d) Descomposición de isometrías

Nivel 4

- a) Visión global de las isometrías planas
- b) Demostración formal de sus propiedades
- c) En la estructura grupal se toma en cuenta las relaciones existentes entre las isometrías que son generalizadas

Los autores de esta propuesta realizaron estudios con alumnado de educación primaria y con futuros maestros. Utilizaron diferentes figuras representativas y plantearon diversas actividades que conducen a la superación de cada uno de los cuatro niveles. Para superar el Nivel 4, por ejemplo, propusieron que se requiere un dominio en el concepto de estructura grupal de las isometrías, así como la comprensión y aplicación del teorema de clasificación de las isometrías planas, el cual establece que cada isometría es equivalente a un producto de tres o más isometrías, y el reconocimiento de movimientos equivalentes, descomposiciones y productos.

Metodología

En este estudio piloto, la metodología empleada para el análisis de los datos es de tipo exploratorio-cualitativo y de carácter descriptivo, ya que se especifican las características de los objetos analizados (Hernández & Mendoza, 2023). Se caracterizaron los niveles de Van Hiele en un grupo de 14 estudiantes del máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, España, que cursaban la asignatura Didáctica de la geometría. El grupo era heterogéneo, incluyendo profesorado en activo de primaria, secundaria y universidad, así como recientes egresados/as de los grados de Matemáticas y de Educación Primaria. El instrumento de análisis fue una tarea en la que se abordó la geometría de las transformaciones, centrada en las habilidades de un sujeto para desarrollar el pensamiento lógico y el sentido espacial. Las transformaciones o isometrías se refieren a los movimientos o cambios de posición en el plano de una forma o figura geométrica sin que se alteren sus propiedades, entre las más comunes se encuentran: traslación, rotación, reflexión y reflexión deslizada, las cuales se mostraron previamente a los estudiantes con el fin de homogeneizar los conocimientos necesarios para resolver las actividades de manera individual. La tarea estuvo compuesta de tres ejercicios que se describen a continuación:

Ejercicio 1. Se compone de dos actividades. a) Elaborar dos mosaicos distintos de 4×4 unidades partiendo de una tesela de 5×5 cm, como la que se indica en la Figura 1 a). Para elaborar los mosaicos se permitió aplicar las transformaciones que se consideraran necesarias. Si la actividad se hacía de manera manual debido a la falta de familiaridad con herramientas digitales, podían utilizar instrumentos geométricos y materiales artísticos. Si el trabajo se hacía de manera digital, se podía utilizar cualquier software de elección libre. La entrega de todos los trabajos fue en formato físico, en una cartulina tamaño A4 tanto para los digitales que fueron impresos como para los que fueron realizados manualmente. b) Entregar un escrito, en el que se

justificaran, con argumentos geométricos, las isometrías empleadas en sus diseños y las diferencias entre los dos mosaicos presentados. Estas actividades fueron concluidas fuera del aula, ya que los trabajos manuales requerían más tiempo del que podía proporcionarse en una sola clase.

Ejercicio 2. Consiste en señalar e identificar el elemento generador y los movimientos utilizados en tres mosaicos distintos, como se indica en la Figura 1 *b*). Los mosaicos podían ser intervenidos manualmente con rotuladores o bolígrafos. Para este ejercicio se dedicaron 30 minutos y fue realizado durante la clase.

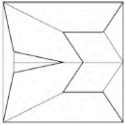
Ejercicio 3. Consiste en hacer un análisis geométrico de un mosaico y responder por escrito las cinco acciones establecidas, como identificar las figuras geométricas mediante una letra, identificar una isometría y resaltarla con un bolígrafo o rotulador, indicando las partes que la componen, describir sus propiedades, identificar varias isometrías en conjunto distintas a la anterior, y encontrar la tesela generadora del mosaico propuesto, como se indican en la Figura 1 *c*). Para este ejercicio se dedicaron dos horas y se realizó durante la clase.

Figura 1

Tarea diseñada para evaluar el razonamiento geométrico

a) Ejercicio 1. CONSTRUIR DOS MOSAICOS

Con esta tesela construir dos mosaicos distintos de 4 x 4 elementos. Dibujar cada mosaico en una cartulina tamaño A4. La tesela mide 5 x 5 cm. Puedes aplicar las transformaciones que más te convengan. Utilizar regla, compás, escuadra, cartabón. Uso de color (opcional). Puede ser: rotuladores, lápices de color, acuarelas, carboncillos, etc.

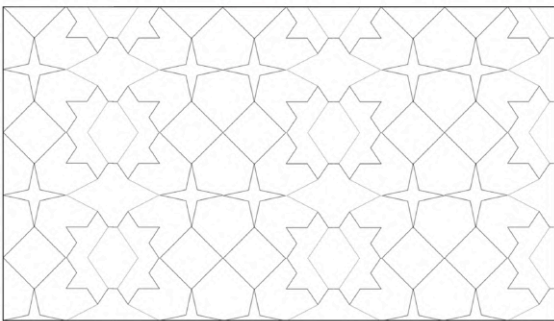


b) Ejercicio 2. IDENTIFICAR ELEMENTO GENERADOR

Identifica la tesela generadora y los movimientos con los que se obtienen los siguientes mosaicos. Justifica tu respuesta



c) Ejercicio 3. ANALIZAR MOSAICO



- 1) Identificar los hexágonos con una *H*, los rombos con *R*, los cuadrados con *C*, los polígonos cóncavos con *I*, los polígonos estrellados con *E*. Define cada uno de ellos.
- 2) Elige un elemento e identifica su transformación. Señala con un rotulador su centro de giro; su eje de simetría o sus puntos de traslación.
- 3) Describe las propiedades de esta transformación.
- 4) Identifica y señala otras transformaciones. ¿Qué relación tienen entre ellas?
- 5) Hallar el elemento generador (tesela) del mosaico. ¿cómo lo has conseguido? Explica.

En el análisis del primer ejercicio se tomaron en cuenta las capacidades de destrezas y la predisposición para comunicar resultados matemáticos por

escrito. En el segundo y tercer ejercicio, se consideró la capacidad de comprensión y análisis al responder a cada una de las acciones establecidas.

Las categorías que se establecieron en cada nivel de Van Hiele para analizar las respuestas de esta tarea se desglosan de la siguiente manera:

- C1a. Identificó el elemento generador y movimientos de teselas, centro de giro, vector, ejes...
- C1b. Señaló y definió las figuras geométricas, incluidos los polígonos y los polígonos estrellados.
- C1c. Señaló los movimientos de las teselas en los mosaicos.
- C2a. Construyó dos mosaicos distintos y comprendió las formas nuevas generadas y las propiedades.
- C3a. Dibujó/intentó con recortables para ubicar/señalar varios movimientos.
- C3b. Justificó las diferencias de los mosaicos con argumentos geométricos y matemáticos.
- C3c. Definió/explicó adecuadamente las isometrías señaladas con lenguaje técnico, no coloquial.
- C3d. Indicó las partes de la isometría (centro de giro, ángulo, ejes de simetría, vectores).
- C4a. Indicó distintas isometrías a la vez, con su centro de giro, ángulo, ejes de simetría, vectores.
- C4b. Demostró las distintas isometrías encontradas en mosaico.
- C4c. Describió las relaciones entre las distintas isometrías señaladas en el mosaico.

No se categorizó el Nivel 5 porque no se esperaban respuestas correspondientes a demostraciones formales. Las categorías C1a, C1b y C1c están asociadas con el Nivel 1, que es el reconocimiento de figuras estáticas y dinámicas. La categoría C2a, se asocia con el Nivel 2, que es el descubrimiento experimental de nuevas formas geométricas mediante la práctica manual o digital de las isometrías en el plano. Las categorías C3a, C3b, C3c y C3d están asociadas con el Nivel 3, en el que se exigen deducciones, definiciones y justificaciones de las propiedades de las isometrías, así como su descomposición para describir las partes que las constituyen. Por último, las categorías C4a, C4b y C4c se asocian con el Nivel 4, que corresponde a la visión global de las isometrías planas en conjunto y a la demostración formal de sus propiedades.

Resultados

En la Tabla 1 se muestra la manifestación de las categorías de cada sujeto considerando como unidad de análisis las respuestas completas de los tres ejercicios. La ubicación de las categorías está asociada con cada uno de los cuatro niveles de Van Hiele descritos en el marco teórico.

Tabla 1*Niveles de Van Hiele manifestado por los sujetos en cada categoría*

	N 1			N 2	N 3				N 4		
Sujeto	C1a	C1b	C1c	C2a	C3a	C3b	C3c	C3d	C4a	C4b	C4c
S1		o	o	o			o	o			
S2	o		o	o		o	o				
S3	o		o	o	o			o	o		
S4	o	o	o	o	o	o	o	o	o		
S5	o	o	o	o			o	o			
S6	o			o		o					
S7	o	o	o	o	o	o	o	o	o		
S8		o	o	o				o			
S9	o		o	o			o	o			
S10	o	o	o	o		o		o			
S11	o		o	o							
S12		o	o	o		o	o	o	o		
S13	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	
S14	o			o							

Para el Ejercicio 1, cada estudiante elaboró dos mosaicos. Se presentó un total de 28 diseños, de los cuales 16 se realizaron con software libre y 12 se hicieron de forma manual. De los 28 diseños, 21 fueron coloreados y 7 presentaron únicamente las líneas de trazo, lo cual no resta valor a la destreza puesta en juego. Se observó que dos mosaicos entregados fueron contruidos con base en teselas recortadas en papel; esto permitió que se convirtieran en un material manipulativo. En la Figura 2 a) se muestran tres mosaicos realizados digitalmente y tres mosaicos realizados de forma manual. En ambos casos se observan diferentes movimientos y nuevas formas geométricas que fueron creadas con un mismo elemento generador.

En la fase de análisis, todos los sujetos experimentaron las isometrías y el descubrimiento de nuevos elementos interfigurales como resultado de la elaboración de dos mosaicos. Esto se ve reflejado en la columna de la categoría C2a, lo que indica que todos superaron el Nivel 2. Se observó que únicamente cuatro sujetos utilizaron recortables o dibujos para identificar los movimientos (C3a) y que siete sujetos manifestaron dificultades para definir y justificar los conceptos y propiedades que diferencian las

isometrías (C3b). Esto puede deberse a que no redactaron adecuadamente la explicación que corresponde a las definiciones de traslación, rotación y simetrías. También fue notorio que seis sujetos utilizaron un lenguaje demasiado coloquial en su forma de expresar las definiciones, como se ve reflejado en la columna C3c.

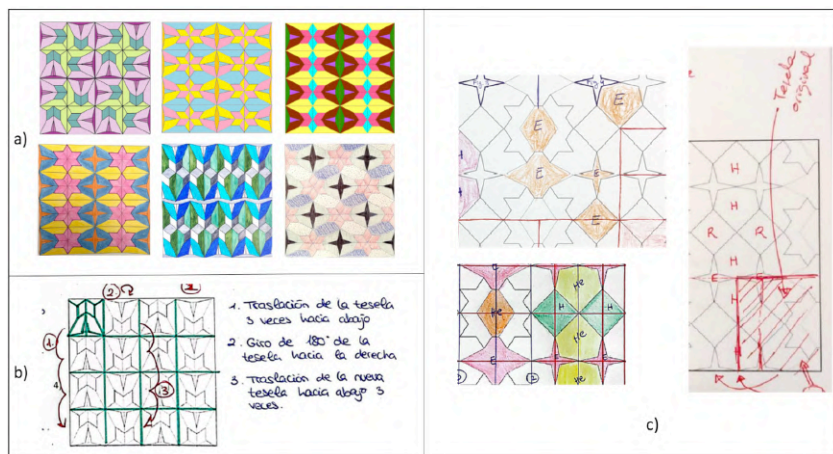
En el Ejercicio 2 se observó que, al identificar visualmente las transformaciones, once de los sujetos proporcionaron respuestas señalando el movimiento y los ángulos de giro como se aprecia en la columna C1a. Por su parte, tres de ellos proporcionaron respuestas sin hacer ninguna anotación y solo tres mostraron dificultad para visualizarlas. El reconocimiento de los movimientos (movimiento dinámico) fue conseguido por doce sujetos, de los cuales solo dos explicaron el concepto de vectores y movimientos (C1c). En la Figura 2 b) se muestra un ejemplo de las respuestas proporcionadas.

En el Ejercicio 3 se observó que seis sujetos tuvieron dificultades para identificar visualmente los elementos geométricos en el mosaico, por ejemplo, confundieron un rombo con un cuadrado, un cuadrado con un hexágono, o un polígono estrellado con un hexágono (C1b). También se observó que estos seis sujetos tuvieron dificultad para definir un polígono estrellado. En cuanto a la identificación visual de transformaciones y movimientos, sólo tres sujetos tuvieron dificultad para ubicar el centro de giro, los ejes de simetría o los puntos de traslación (C1a). Las propiedades de las transformaciones pudieron definirlas de manera adecuada ocho sujetos, el resto no respondió o lo hizo de manera incorrecta (C3c). La mayoría logró identificar el elemento generador, pero cuatro sujetos no pudieron hacerlo (C3d). La visión global de las isometrías en el plano fue manifestada por cinco sujetos (C4a), pero solamente uno de ellos entregó su escrito con demostraciones formales (C4b).

Por último, ninguno de estos cinco sujetos respondió adecuadamente a la descripción de las relaciones entre las isometrías que ellos mismos señalaron (C4c). Esto puede deberse a que requerían mayor tiempo para redactar sus respuestas, a que no respondieron adecuadamente o a que simplemente la dejaron sin responder. En la Figura 2 c) se muestran varios ejemplos de los errores que se identificaron, por ejemplo, nombrar los cuadrados con la H de hexágono o al polígono de seis lados identificarlo con la E de polígono estrellado, incluso, identificar un cuadrado con la E de polígono estrellado y a la vez con la R de rombo. También se observaron dificultades en la identificación del elemento generador o tesela generadora del mosaico. Esta identificación habría sido más accesible si se hubieran trazado varias retículas sobre el mosaico hasta visualizar la mínima composición de los elementos geométricos.

Figura 2

Ejemplos de respuestas a los ejercicios de la tarea



Conclusiones

En este estudio piloto se resalta la importancia de la visualización espacial en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, principalmente en lo que respecta a la representación y transformación de objetos en el plano y la comunicación escrita de resultados matemáticos. Además, se aborda una práctica educativa mediante el diseño de una tarea que posibilite el desarrollo de habilidades de visualización de manera eficaz. Los errores encontrados no estaban considerados para ser analizados, sin embargo, resultaron útiles para el planteamiento de nuevas acciones en futuras tareas y en la planificación de la docencia, por ejemplo, otorgar mayor atención a la geometría de las transformaciones y a la descripción de las relaciones interfigurales, ya que son necesarias para la manifestación de los dos primeros niveles de Van Hiele, que se asocian con la visualización y el análisis de los objetos geométricos con los que se está trabajando. Esto contribuiría al desarrollo de habilidades de visualización para identificar, reconocer y comparar sus diferencias, semejanzas, analogías y describir sus propiedades intrínsecas.

La tarea que se realizó en este estudio favoreció que tres sujetos superaran por completo todas las categorías de los tres primeros niveles y que manifestaran algunas características propias del Nivel 4, que están relacionadas con la categoría de visión global de las isometrías planas. Se considera que estos tres sujetos se encuentran en transición del Nivel 4 al Nivel 5; es posible que correspondan a profesores de matemáticas en servicio o los estudiantes que recientemente concluyeron la carrera de matemáticas. Su formación les permitiría atender el rigor matemático

exigido por este Nivel 5, en el que se requiere una comprensión profunda de teoremas y axiomas, así como el dominio de diferentes geometrías. El resto del grupo, al ser heterogéneo, con estudiantes recién egresados de la carrera de magisterio, de ingeniería y de ciencias sociales, solamente manifestó características propias de los Niveles 1, 2 y 3, que se relacionan con las diferentes categorías que componen la propuesta del modelo de Van Hiele aplicado a isometrías (Jaime & Gutiérrez, 1989).

Los resultados obtenidos en este estudio son consistentes con los encontrados por Arnal-Bailera y Manero (2021) en uno de sus trabajos realizados con estudiantes de posgrado. Por ello, se considera necesario que en los programas de formación de profesorado y de futuros investigadores e investigadoras en Didáctica de las Matemáticas se propongan nuevas tareas y actividades educativas que contribuyan a la manifestación de los sujetos en el Nivel 4, como lo sugirieron Pandiscio y Knight (2010). Las categorías que se establecieron en este estudio no solo revelaron las habilidades y destrezas de los sujetos en cuestión, sino que también permitieron identificar errores y dificultades que se presentaron durante las acciones implementadas en esta tarea.

El hecho de que los sujetos manifestaran características de algunas categorías asociadas a un determinado nivel, pero no de otro, sugiere que la caracterización de los niveles de Van Hiele en un sujeto está estrechamente relacionada con el tipo de la tarea propuesta y con las habilidades y destrezas que presenta cada sujeto. Los hallazgos de este estudio constituyen un punto de partida para futuras investigaciones en el que se tiene contemplado la comparación de los niveles de van Hiele con otros referentes teóricos, como podrían ser los componentes del sentido espacial, en particular, el componente correspondiente a la visualización.

Una limitación que presenta este estudio es el tamaño de la muestra analizada, al no ser suficientemente numerosa, no es posible generalizar los resultados obtenidos. Además, no se realizó un estudio previo de los niveles de Van Hiele antes de pasar a las teselaciones debido a la corta duración prevista para esta tarea durante el curso. No obstante, las categorías que se establecieron para analizar la tarea no sólo revelaron las habilidades y destrezas de los sujetos, sino que también permitieron identificar errores y dificultades que podría dar lugar a la generación de conocimientos posteriores.

En las implicaciones para la enseñanza, la elaboración manual o digital de los mosaicos contribuyó al desarrollo de competencias procedimentales y al fortalecimiento de las habilidades de visualización mediante movimientos y transformaciones en el plano. Sin embargo, la falta de dominio de instrumentos geométricos físicos dio lugar a retrasos y dificultades de

precisión al elaborar los diseños. El uso de software de geometría dinámica como GeoGebra habría permitido atenuar esas dificultades. Esta tarea permitió establecer conexiones matemáticas con elementos artísticos que incentivaron su creatividad y comprensión de las ideas y los procesos matemáticos de las isometrías. La elaboración de nuevas propuestas para el diseño y la creación de teselados geométricos abre una línea de análisis para futuros estudios.

Referencias

- Arnal-Bailera, A., & Manero, V. (2024). A characterization of Van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the Delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 537–560. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z>
- Arnal-Bailera, A., & Manero, V. (2021). La demostración en matemáticas. Perfiles de profesores en formación según sus niveles de Van Hiele. En P. D., Diago, D. F., Yáñez, M. T., González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 149–156). SEIEM.
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19–42). SEIEM.
- Ghorbani, M., Izadi, F. S., Roshan, S. S., & Ebrahimpour, R. (2024). Assessing prospective teacher's geometric transformations thinking: A Van Hiele theory-based analysis with eye tracking cognitive science method. *Technology of Education Journal*, 18(1), 67–88.
- Hernández, S. R., & Mendoza, T. Ch. P. (2023). *Metodología de la investigación, las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta* (2ª ed.). McGraw-Hill.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele model. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131–138). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Lyublinkaya, I., & Cabral, M. (2023). Effect of GeoGebra explorations combined with art-based practices on in-service teachers' understanding of geometric transformations. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1–9). European Society for Research in Mathematics Education.
- Mbatha, M., & Bansilal, S. (2023). Using the Van Hiele theory to explain pre-service teachers' understanding of similarity in Euclidean geometry. *Education Sciences*, 13(9), 861. <https://doi.org/10.3390/educsci13090861>

- Morales, R. G., & Rubio, G. N. (2020). Una experiencia con teselados usando GeoGebra. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (90), 65–71.
- Mutlu, Y. (2025). Prospective elementary mathematics teachers' view on the use of Islamic geometric patterns in mathematics lessons. *Journal of STEM Teacher Institutes*, 5(1), 13–20.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. NTCM.
- Övez, F. T. D., & Özdemir, M. (2024). An examination of pre-service teachers' Van Hiele levels of geometric thinking and proof perception types in terms of thinking processes. *Educational Research and Reviews*, 19(1), 26–39.
- Pandiscio, E. A., & Knight, K. C. (2010). An investigation into the Van Hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. *Journal of Research in Education*, 20(1), 45–53.
- Van Hiele, H.P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Yi, M., Wang, J., Flores, R., & Lee, J. (2022). Measuring pre-service elementary teachers' geometry knowledge for teaching 2-dimensional shapes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(8), Artículo em2137. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12220>

 Autor de correspondencia

Ángel Colín | angelenrique.sanchez@uca.es

