



Taller sobre pensamiento variacional para el diseño de actividades para Pensamiento Matemático 3 en bachillerato

Workshop on variational thinking for the design of activities
for Mathematical Thinking 3 in upper secondary education

Martha Cecilia Palafox Duarte  | martha.palafox@unison.mx
Universidad de Sonora

Agustín Grijalva Monteverde  | agustin.grijalva@unison.mx
Universidad de Sonora

Recepción: 31 de julio de 2025 | Aceptación: 30 de octubre de 2025

Resumen

Con el interés de promover el desarrollo del pensamiento variacional, nos encontramos la favorable coyuntura de que en México se está implementando en todos los niveles escolares el modelo educativo llamado la Nueva Escuela Mexicana (NEM), específicamente el Marco Curricular Común (MCC) para la Educación Media Superior (EMS); De esta manera, se hace visible la necesidad de capacitación docente con el cambio de enfoque presentado en este nuevo modelo. Por lo anterior, se diseñó un taller utilizando elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) para promover el desarrollo del Pensamiento Variacional (PV) de los profesores de bachillerato mediante el diseño de actividades en colegiado con este tipo de pensamiento para la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático 3. Para la valoración de la propuesta se utiliza el modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico-matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas donde se proponen dos competencias profesionales para el quehacer docente, a su vez se presentan subcompetencias con categorías y niveles de logro para cada una de estas. En este documento se presenta la subcompetencia matemática de Planteamiento de problemas que se encuentra acorde a lo establecido en el rediseño curricular de la EMS donde se visualiza al profesor como diseñador de tareas en colegiado con otros docentes “diseñar y construir en conjunto los materiales para guiar la resolución de la problemática desde una perspectiva integral” (Secretaría de Educación Pública, 2019, p. 72).

Palabras clave

Pensamiento variacional, bachillerato, Marco Curricular Común, capacitación docente, profesores de matemáticas

Abstract

With the aim of promoting the development of variational thinking, we find ourselves in the favorable context of Mexico's nationwide implementation of the educational model known as the New Mexican School (NEM), specifically the Common Curricular Framework (MCC) for Upper Secondary Education (EMS). This situation highlights the need for teacher training due to the shift in pedagogical approach introduced by the new model. In response, a workshop was designed using theoretical elements from the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (EOS) to foster the development of Variational Thinking (VT) among upper secondary teachers through the collaborative design of activities aligned with this type of thinking for the Curricular Learning Unit (UAC) Mathematical Thinking 3. For the evaluation of the proposal, the Mathematics Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge and Competence (CCDM) model was used, which proposes two professional competencies for teaching practice and defines sub-competencies with categories and achievement levels for each. This document presents the mathematical sub-competency of Problem Posing, which aligns with the curricular redesign of upper secondary education, where the teacher is envisioned as a task designer collaborating with other educators to "design and jointly construct materials to guide problem solving from an integral perspective" (Secretaría de Educación Pública, 2019, p. 72).

Keywords

Variational thinking, upper secondary education, Common Curricular Framework, teacher training, mathematics teachers.

Introducción

Los cursos tradicionales de Cálculo no necesariamente permiten la construcción de las ideas variacionales y se centran en la enseñanza de técnicas y algoritmos que no facilitan visualizar el potencial del estudio de la variación, tal como lo mencionan Caballero y Cantoral (2013) "Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarias para la comprensión de las ideas del cálculo" (p. 1585).

Este proyecto trata sobre fomentar el desarrollo del Pensamiento Variacional de los profesores de Educación Media Superior (EMS), ya que en la revisión literaria se mencionan algunas dificultades que tienen los docentes al trabajar con este enfoque. Se pretende que los maestros desarrollen su Pensamiento Variacional mediante el diseño de actividades en colegiado, donde se plantearán situaciones en contextos que puedan concebir su utilidad en el análisis de la covariación. Thompson y Carlson (2017) definen "la covariación en términos de "conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como variables simultáneamente" (p. 424).

Antecedentes

En educación matemática se está fomentando el estudio del Cálculo mediante el Pensamiento Variacional. Palafox y Grijalva (2023) mencionan que “se requiere tratar al Cálculo con un enfoque más dinámico, menos estático donde se refleje el estudio y comprensión de la variación y el cambio, la relación entre magnitudes variables en contextos reales” (p.305). Cabrera et al. (2023) recomiendan “diversificar los contextos en los que puede aparecer el estudio del cambio y los propósitos para los que se plantea en primaria, por ejemplo, en el análisis de fenómenos o situaciones de cambio” (p.21). Como se observa se plantea un estudio centrado en el estudio de la variación, no sólo enfocarse en los elementos formales que dificultan la comprensión de los elementos dinámicos del Cálculo.

Es fundamental volver la mirada al estudio de la variación como eje central del pensamiento matemático, especialmente en el contexto del Cálculo. Esto implica analizar con profundidad los elementos que lo constituyen, más allá de su tratamiento meramente formal o procedimental. La enseñanza tradicional ha tendido a presentar los objetos matemáticos de manera estática, lo que limita la comprensión de su naturaleza dinámica. Cabrera et al. (2023) plantean el desarrollo del pensamiento variacional entre los estudiantes como elemento central para significar las nociones del cálculo escolar.

Una coyuntura favorable para este trabajo es que, en México, se está implementando la Nueva Escuela Mexicana (NEM) para bachillerato, lo cual lleva a la creación de un nuevo Marco Curricular Común MCC (SEP, 2019). Se cambia la dinámica de trabajo por medio de competencias matemáticas por la de progresiones de aprendizaje (Secretaría de Educación Pública, 2023) y las asignaturas de matemáticas en los primeros tres semestres por pensamientos matemáticos, abordando el Pensamiento Variacional (PV) en tercer semestre por medio de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático 3.

En este marco, los docentes deben impartir la UAC de Pensamiento matemático 3; Sin embargo, los profesores no han sido formados bajo el enfoque del Pensamiento Variacional. Durante su formación académica se abordaron los elementos del Cálculo mediante el estudio de los objetos formales y abstractos, utilizando la definición conjuntista de la función. Caballero y Cantoral (2013) pudieron detectar algunas dificultades que se presentaban al trabajar con este tipo de pensamiento, como imagina que los datos o gráficas siguen una ecuación determinada “que se debía asumir datos extras que no eran siempre válidos, como suponer que las gráficas correspondían a una función en particular, o en hacer uso de propiedades que no eran válidas en ese contexto” (p.280) lo que trae consigo dificultades

al momento de pretender desarrollar el Pensamiento Variacional en los estudiantes, entre otras dificultades. Por este motivo, en este proyecto se promueve el desarrollo del pensamiento variacional en docentes de bachillerato.

Con la incorporación de la UAC de Pensamiento Variacional en el currículo de matemáticas, se plantea un cambio significativo en la manera de abordar el estudio del Cálculo, orientándola hacia el análisis de fenómenos de cambio en contextos reales. Por lo que, es necesario iniciar con la capacitación de los docentes de bachillerato, para que ellos desarrollen una comprensión profunda del pensamiento variacional que les permita diseñar actividades didácticas centradas en el estudio de la variación, integrando situaciones contextualizadas y relevantes para sus estudiantes. Esta transición implica no solo una actualización conceptual, sino también una reconfiguración de sus prácticas docentes. De esta manera, el objetivo de este trabajo fue el diseño de un taller para promover el desarrollo del Pensamiento Variacional (PV) de los profesores de bachillerato, con el fin de que ellos puedan elaborar actividades en colegiado para el curso de Pensamiento Matemático 3.

En este contexto, resulta primordial que los profesores de bachillerato no solo comprendan el pensamiento variacional, sino que lo integren activamente en su práctica docente. Por ello, el objetivo de este trabajo es desarrollar el pensamiento variacional de los profesores de bachillerato mediante el diseño colegiado de actividades didácticas, utilizando elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), con el fin de utilizar una definición del pensamiento variacional que se acorde al marco curricular común.

Para valorar el desarrollo del pensamiento variacional en los docentes, se utilizó el modelo de Conocimiento y Competencias didáctico-matemáticas del profesor (Pino-Fan et al., 2022), el cual permite analizar dos dimensiones fundamentales: la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Este modelo proporciona un marco teórico para identificar avances en la comprensión conceptual de la variación, así como en la capacidad de diseñar e implementar situaciones de enseñanza que promuevan el pensamiento variacional en el aula.

Trabajos relacionados con el Pensamiento Variacional y el Desarrollo profesional docente

La labor o el rol que desempeñan los docentes es de suma importancia en las aulas escolares, pues de ellos depende, en gran medida, el aprendizaje de sus alumnos. De esta manera, nos dimos a la tarea de realizar algunas revisiones literarias en educación matemática en torno a profesores en general, es decir, en formación o en servicio, pero prestando atención a contextos vinculados con el pensamiento variacional o temas afines al Cálculo, como los conceptos de función, derivada, integral, entre otros.

En la enseñanza del cálculo en el nivel medio superior, el desarrollo del pensamiento variacional permite a los estudiantes no solo operar con funciones, sino también interpretar y anticipar comportamientos matemáticos en contextos diversos donde la variación se encuentra presente. En este sentido, los trabajos de Caballero y Cantoral ofrecen una contribución significativa al análisis de las prácticas docentes, al explorar tanto las potencialidades como las limitaciones que enfrentan los profesores en su labor cotidiana.

En el estudio titulado *El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato* (2013), se observa que los docentes privilegian procedimientos algorítmicos por encima de la exploración de las causas del cambio, lo que restringe la construcción de significados matemáticos más complejos. Complementariamente, en *Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato* (2013), se identifican obstáculos específicos en la apropiación del carácter variacional del cálculo, como la centración en objetos matemáticos y la aplicación mecánica del conocimiento. Ambos estudios coinciden en señalar la necesidad de transformar las prácticas pedagógicas para favorecer un pensamiento matemático más profundo, que permita resignificar el conocimiento escolar y potenciar el aprendizaje significativo en los estudiantes.

La incorporación del pensamiento variacional en la enseñanza del cálculo no debe limitarse únicamente al abordaje de contenidos temáticos, sino que también debe considerar el papel activo del docente como mediador del conocimiento matemático. En este sentido, Reyes-Gasperini et al. (2019) proponen “el empoderamiento docente” como una vía para fortalecer dicho pensamiento y promover prácticas didácticas más significativas. A través de una investigación basada en situaciones de aprendizaje diseñadas por el Proyecto de Investigación y Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM), se documenta cómo un profesor en servicio establece una nueva relación con el conocimiento matemático. Mediante actividades como el llenado de contenedores, se fomenta la práctica de la predicción y se generan espacios de diálogo entre el docente y sus estudiantes. El estudio analiza las interacciones en el aula y las reflexiones de los alumnos desde una perspectiva socioepistemológica, destacando el papel fundamental de la práctica docente en la construcción social del conocimiento y en el fortalecimiento del pensamiento variacional en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En su tesis doctoral, Cabrera (2014), analiza cómo el pensamiento y lenguaje variacional, vinculado a la práctica de la predicción, se convierte en una herramienta para que los profesores de cálculo en bachillerato construyan saberes matemáticos en el aula. A través del estudio de caso de un docente en servicio, se evidencia que el enfoque de la variación permite al profesor

asumir un papel más activo y reflexivo en su práctica docente, alejándose de enfoques centrados exclusivamente en el tratamiento algebraico de los contenidos. En su lugar, se privilegia el análisis de fenómenos mediante representaciones gráficas, razonamientos geométricos y situaciones contextualizadas, lo que contribuye a resignificar la matemática escolar en contextos reales.

Utilizando el enfoque del razonamiento covariacional, Trejo et al. (2021) abordan el estudio de funciones logarítmicas y exponenciales en el contexto de la formación de futuros profesores de matemáticas. A través de un experimento de enseñanza implementado con estudiantes de sexto semestre de la licenciatura en Matemáticas, se emplearon herramientas tecnológicas como el software GeoGebra para construir puntos sobre curvas y explorar sus variaciones.

Esto permitió a los participantes identificar patrones de progresión aritmética y geométrica, favoreciendo el desarrollo de habilidades para analizar relaciones funcionales en contextos dinámicos. No obstante, el estudio revela la complejidad que implica transitar del razonamiento covariacional discreto al continuo, lo que pone de manifiesto la necesidad de diseñar tareas didácticas que promuevan una comprensión del concepto de variación y su aplicación en situaciones reales.

En el contexto de la formación de futuros profesores de matemáticas, el razonamiento covariacional es una herramienta útil para interpretar y modelar relaciones entre magnitudes en situaciones reales. Villa-Ochoa (2020) estudia las estrategias que utilizan los estudiantes de formación docente al resolver tareas de modelación que requieren información fuera del ámbito matemático. Los resultados muestran que algunos participantes buscan patrones para entender las funciones como modelos matemáticos, mientras que otros usan ejemplos específicos para establecer relaciones multiplicativas entre cantidades.

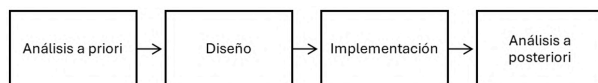
El desarrollo profesional docente en torno al pensamiento variacional ha sido abordado en diversos estudios, destacando su relevancia para enriquecer la enseñanza del cálculo y fortalecer la comprensión de fenómenos de cambio. En este trabajo se presenta una propuesta de capacitación dirigida a profesores en servicio, orientada a promover el pensamiento variacional mediante el diseño colaborativo de actividades didácticas en espacios colegiados. Esta iniciativa se fundamenta en una postura alineada con el Marco Curricular Común vigente, y se concreta en la implementación de un taller especializado que busca favorecer el trabajo conjunto entre docentes de bachillerato. A través de este enfoque, se pretende generar materiales didácticos contextualizados que respondan a las necesidades reales del aula y contribuyan al desarrollo de un pensamiento matemático más profundo.

Elementos metodológicos

Para el desarrollo del proyecto de intervención se trabajó directamente con docentes en servicio del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), quienes fueron considerados como candidatos para impartir el curso *Pensamiento Matemático 3*. El diseño del taller tuvo como propósito principal favorecer el desarrollo del Pensamiento Variacional (PV) en los profesores, mediante el diseño de actividades que permitieran explorar procesos de cambio y variación en contextos reales. Para la realización del proyecto se definieron cuatro etapas, representadas en la Figura 1, que guiaron el proceso de intervención

Figura 1

Etapas metodológicas del proyecto de intervención



El análisis a priori se orientó a determinar su nivel inicial en cuanto al desarrollo del Pensamiento Variacional de los docentes en relación con las competencias del modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM), así como identificar las necesidades formativas de los docentes frente al nuevo Marco Curricular Común (MCC). Esta etapa fue fundamental para diseñar un taller pertinente que respondiera a los retos que implica la implementación del curso *Pensamiento Matemático 3* en el nivel medio superior.

La etapa de diseño se centró en la elaboración del taller y de las actividades didácticas que respondieran a las necesidades formativas identificadas en el análisis a priori. Este proceso implicó seleccionar situaciones que permitieran a los docentes explorar el pensamiento variacional desde una perspectiva tanto matemática como didáctica. Para ello, se les presentó una actividad modelo representativa del tipo de tareas que se espera diseñen durante el taller, con el fin de ejemplificar cómo abordar fenómenos reales mediante el análisis de la variación entre magnitudes. Las actividades del taller fueron diseñadas para promover la reflexión sobre los procesos de cambio y variación, así como para fortalecer la capacidad de los profesores para modelar fenómenos reales mediante el establecimiento de relaciones entre magnitudes.

La etapa de implementación consistió en la realización del taller con los docentes participantes, en un espacio diseñado para fomentar el trabajo colegiado y la reflexión pedagógica. A través de actividades colaborativas en cuatro sesiones presenciales, los docentes analizaron la actividad modelo

presentada, discutieron los elementos del pensamiento variacional y comenzaron a diseñar propuestas didácticas contextualizadas para el curso *Pensamiento Matemático 3*. Este proceso permitió vincular la teoría con la práctica, fortalecer las competencias didáctico-matemáticas y avanzar hacia una enseñanza más significativa y alineada con los principios de la Nueva Escuela Mexicana.

Para la valoración de la propuesta se emplea el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM), el cual ofrece un marco teórico para analizar las prácticas docentes de los profesores de matemáticas. Se busca determinar el grado de desarrollo del pensamiento variacional en los docentes que participaron en el taller. Con el fin reconocer cómo los profesores interpretan, modelan y comunican situaciones de variación, así como su capacidad para diseñar actividades que promuevan dicho pensamiento en el aula. La valoración no solo considera los conocimientos matemáticos implicados, sino también las decisiones didácticas que reflejan una comprensión del enfoque variacional como parte de su práctica profesional.

Contexto institucional y participantes

Como parte del proyecto se propuso a la dirección académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora la realización de un taller de discusión sobre el nuevo marco curricular común y particularmente sobre los planteamientos del curso *Pensamiento Matemático 3*, el cual corresponde al tercer semestre del plan de estudios de bachillerato y estaba próximo a implementarse. Por la etapa en que la propia institución se encontraba, se nos hizo la invitación de desarrollar el taller con todos los profesores del Colegio (son 30 planteles distribuidos a lo largo de toda la geografía del estado de Sonora). Una primera acotación de nuestra parte consistió en plantear que era preferible hacer el taller con pocos profesores, que estuvieran en oportunidad de asistir presencialmente y, con la experiencia adquirida, se pudiera replicar posteriormente a gran escala.

Esto condujo a hacer una selección de profesores con una invitación amplia a todos aquellos docentes que laboraran en los planteles de Hermosillo y presumiblemente tendrían a su cargo grupos de estudiantes en el curso de *Pensamiento Matemático 3*, en el momento en que se impartiera. Aunque esta situación condujo a que en principio se contara con la participación de 4 profesores, rápidamente el grupo se redujo a 3, quienes manifestaron su interés en realizar todas las actividades del taller.

La formación y trayectoria de los profesores participantes en el proyecto son diversas. El docente 1 es profesor con 25 años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas; cuenta con licenciatura en Matemáticas y

una maestría en Educación. El docente 2 es ingeniero industrial con 12 años de experiencia en el ámbito educativo y posee una maestría en Matemática Educativa. Por su parte, el docente 3 es licenciado en Física, tiene 13 años de servicio docente y actualmente es pasante de la maestría en Física.

El taller se llevó a cabo en cuatro sesiones presenciales, cada una con una duración de 15 horas, distribuidas en tres días consecutivos por sesión. En total, se impartieron 60 horas de trabajo presencial. Las grabaciones y filmaciones de los profesores sólo han estado disponibles para la autora y su director de tesis, con el conocimiento y aprobación de los participantes, con el compromiso de su destrucción cuando se haya concluido el trabajo; los reportes escritos sobre las actividades realizadas se mantienen en completo anonimato, haciendo referencia a los participantes con las denominaciones de Docente 1, Docente 2 y Docente 3. Para efectos de asegurar el tratamiento ético de este proceso, los profesores firmaron un consentimiento consensuado.

Elementos teóricos y la NEM en el diseño del taller

Se realizó el diseño de un taller sobre el Pensamiento Variacional (PV), orientado al desarrollo de este tipo de pensamiento en docentes del nivel medio superior. Este taller responde a la necesidad de promover una comprensión de los procesos de cambio y covariación, los cuales son fundamentales en el estudio de la variación y en la construcción de modelos matemáticos que representen fenómenos reales. Estas actividades serán implementadas en la Unidad de Aprendizaje Curricular *Pensamiento Matemático 3*.

Para sustentar el enfoque del taller, se toma como referencia la siguiente definición de pensamiento variacional:

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco C., 2002, p. 63).

En el diseño intervienen los siguientes elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS): Sistemas de prácticas, Configuraciones ontosemióticas, Criterios de idoneidad didáctica y Modelo CCDM. En este último, se presentan dos competencias para la actividad profesional del docente de matemáticas: Competencia Matemática (que no implica solamente la parte disciplinar del conocimiento matemático sino lo didáctico-matemático) y Competencia de Análisis e Intervención Didáctica (que son los conocimientos que debe tener un

profesor para la reflexión sobre su práctica docente). Para lograr dichas competencias se proponen algunos elementos a considerar llamados subcompetencias.

Competencia matemática

- Resolución de tareas
- Planteamiento o proposición de problemas
- Análisis de las respuestas a un problema planteado

Competencia de análisis e intervención didáctica

- Análisis de la actividad matemática
- Análisis y gestión de las interacciones
- Uso y manejo de recursos
- Análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Pino-Fan et al. 2022).

En este trabajo se centrará la atención en la subcompetencia matemática: planteamiento de problemas. Esta se asocia con lo establecido en el Marco Curricular Común que define al docente como diseñador de tareas. Además, en la NEM el docente tiene un mayor peso que en los modelos educativos anteriores, ahora el profesor se visualiza como “diseñador curricular y agente de transformación social” (SEP, 2019, p. 3), que tiene como responsabilidad el codiseño de las actividades que presenta a los estudiantes, las cuales deben ser en contextos de interés, con un enfoque integral.

En este marco de referencia, se plantea el diseño de actividades sobre el Pensamiento Variacional, tomando en cuenta que “La implementación del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior se da a través de una mediación didáctica que entiende e integra el contexto, los problemas sociales, la comunidad, las iniciativas e ideas de los educandos” (SEP, 2019, p. 48). Además, se promueven contextos transversales en el proceso de enseñanza, pues “La transversalidad del conocimiento contemplada en la planeación didáctica constituye un punto importante para la presencia y desenvolvimiento de los docentes en el aula” (SEP, 2019, p. 48).

A continuación, se presenta el diseño de las cuatro sesiones con cada una de las actividades del taller para promover el diseño de materiales didácticos para el estudio de la variación en contextos extra matemáticos.

Sesión 1

En esta sesión se inicia con una introducción a los elementos del MCC, entre los cuales destaca el rol del docente como diseñador curricular, es decir, el profesor debe diseñar el material didáctico tomando en cuenta las características del grupo de alumnos donde se implementará. Dado que en el rediseño curricular de la Educación Media Superior (EMS) no se define una postura teórica sobre el Pensamiento Variacional que corresponde a la

UAC de Pensamiento Matemático 3 (PM3), se les proporciona a los profesores las siguientes lecturas sobre el PV para definir un significado institucional de referencia en colegiado que se encuentre alineado con los elementos del MCC.

- *El pensamiento variacional y modelación matemática* de Carlos Vasco (2003): Este pensamiento implica construir modelos mentales que simulen la dinámica de fenómenos, y luego representarlos simbólicamente, calcular con ellos y compararlos con la realidad.
- *Razonamiento covariacional* de Carlson y colaboradores (2002): Se propone que se enfatice el desarrollo de imágenes coordinadas de variación, pasando de la observación simultánea de dos variables a la comprensión de la razón de cambio instantánea.
- *Pensamiento variacional y funcional sección del libro Reconceptualización didáctica del Cálculo* de Jiménez et al. (2022): se promueve una enseñanza centrada en la comprensión de la variación y el cambio, integrando el pensamiento funcional como base para el desarrollo del pensamiento variacional.

Una vez definida la postura teórica que guiaría el proyecto, la profesora encargada del taller presentó a los docentes una actividad modelo, diseñada con base en la postura de Vasco (2002). Esta actividad tiene como finalidad ofrecer una referencia clara sobre el tipo de situaciones didácticas que se espera que los docentes diseñen, considerando el enfoque contextualizado, funcional y orientado al estudio de la variación que caracteriza al pensamiento variacional. Las actividades de la primera sesión del taller son las siguientes:

- Introducción al Marco Curricular Común
- Rol del docente como diseñador curricular
- Posturas sobre el Pensamiento Variacional
- Trabajo sobre actividades y tópicos del PV
- Actividad modelo sobre el PV

La actividad modelo presentada en el taller consistió en el estudio del crecimiento de una microalga sometida a diferentes concentraciones de fósforo. Esta microalga es utilizada como alimento para peces y crustáceos en una granja acuícola ubicada en Bahía de Kino, una localidad del municipio de Hermosillo, Sonora. La situación permite analizar la variación en el crecimiento de la microalga en función de la concentración de fósforo con datos provenientes del Departamento de Investigación Científica y Tecnológicas de la Universidad de Sonora (Lovio-Fragoso et al., 2019), lo que favorece el desarrollo del pensamiento variacional al vincular el estudio de la variación en un contexto real y cercano al entorno de los estudiantes.

Sesión 2

En esta sesión, se propone a los docentes el diseño de actividades en dos momentos. En una primera etapa, los docentes elaboran sus propuestas basándose únicamente en su experiencia previa (como parte de su labor docente, estos han elaborado materiales didácticos). Posteriormente, se les proporciona instrucción sobre algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) como sistemas de prácticas, objetos matemáticos primarios, configuraciones ontosemióticas y se realiza una presentación de los criterios de idoneidad didáctica los cuales se introducen a través de un formato específico de diseño. Además, se les presenta el formato de configuraciones ontosemióticas con el fin de enriquecer y mejorar sus diseños preliminares.

El formato de elementos de diseño (Tabla 1) se presenta de manera accesible y estructurada los criterios de idoneidad didáctica, con el propósito de asegurar que los docentes consideren todos los aspectos relevantes al momento de diseñar sus actividades, sin omitir elementos clave para la coherencia pedagógica y matemática. Por ejemplo, en la Idoneidad afectiva los docentes deben decidir qué tipo de situaciones del pensamiento variacional van a promover:

- Intramatemáticos: se refiere situaciones donde solamente a la utilización de objetos matemáticos tales como estructuras o símbolos.
- Extramatemáticos: se abordan situaciones de problemas de la realidad, en contextos de su entorno local, nacional o global.

Tabla 1

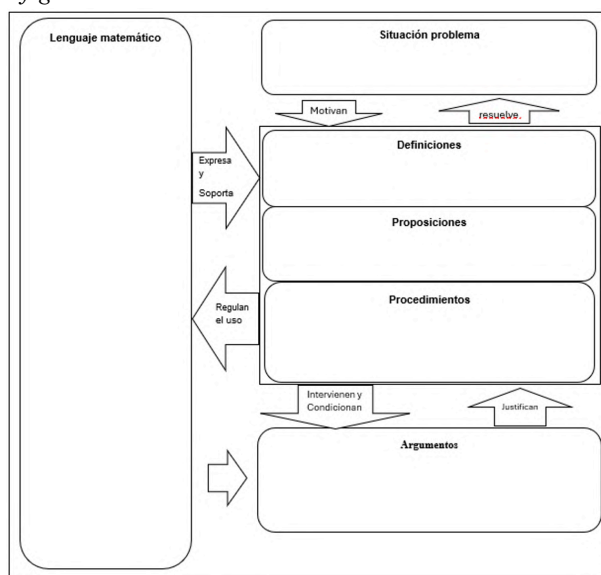
Formato: Elementos de diseño

Criterios	Elementos de diseño
Epistémica	Definir el tema matemático que se va a abordar, definir los objetos matemáticos que intervienen y los que emergen de la práctica matemática.
Cognitiva	Hay que asegurar que las actividades se encuentren dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. Es decir, con base en sus conocimientos previos.
Interaccional	• Definir interacciones entre los participantes.
Mediacional	Recursos disponibles: • Tiempo • Materiales • Recursos tecnológicos
Afectiva	Situaciones del pensamiento variacional: • Extramatemáticos - En contexto de su entorno local, nacional, global. - Problemas de su comunidad o entorno. • Intramatemáticos
Ecológica	• Que se encuentren con características y elementos enmarcados en el marco Curricular Común de la EMS. • Transversalidad con otras asignaturas

Como parte del proceso formativo, se instruye a los docentes en el uso y llenado del formato de las configuraciones ontosemióticas (Figura 2) previstas en el EOS, con el objetivo de analizar las prácticas matemáticas involucradas en las actividades diseñadas. Este instrumento permite identificar los objetos matemáticos primarios que intervienen en la actividad, así como aquellos que emergen durante su implementación, facilitando una reflexión más profunda sobre la idoneidad didáctica y la coherencia epistemológica del diseño.

Figura 2

Formato de configuración ontosemiótica



Nota. Fuente: Godino et al (2008)

A continuación, se presentan las actividades correspondientes a la segunda sesión del taller, diseñadas con el propósito del diseño de actividades individuales:

- Diseño de actividades del PV
- Elementos teóricos del EOS
- Instrumentos teóricos para el diseño
- Rediseño individual de actividades

Sesión 3

En la tercera sesión, se lleva a cabo el rediseño de las actividades de manera colegiada, con el objetivo de enriquecer las propuestas desde la perspectiva de todos los docentes participantes en el taller. Posteriormente, los docentes deben resolver las actividades rediseñadas con el propósito de identificar

posibles conflictos relacionados con el planteamiento de los reactivos de cada una de las actividades. Finalmente, se analizan las respuestas de los estudiantes tras la implementación de una actividad rediseñada en un grupo de bachillerato, con el fin de vincular las producciones con los objetos matemáticos previstos y verificar la pertinencia del contexto utilizado.

- Rediseño en colegiado de actividades
- Resolución de actividades
- Análisis de respuestas de actividades

Sesión 4

En la cuarta sesión del taller, se contempla una revisión final de las actividades diseñadas y la creación de un repositorio que las compile, incluyendo todos los elementos de diseño utilizados en su elaboración. Además, se comprueba que las actividades cumplan con las progresiones propuestas en la UAC de PM3 (SEP, 2023) de acuerdo con sus características específicas. Para concluir el taller, se solicita a los participantes una retroalimentación general respecto a diversos aspectos, tales como: el número de sesiones, la profundidad de los temas abordados, el tiempo destinado a las actividades, la suficiencia de los elementos teóricos proporcionados, las dinámicas de trabajo empleadas, entre otros puntos que los docentes deseen destacar.

- Institucionalización
- Retroalimentación sobre el taller

Puesta en escena y discusión de resultados

La etapa de implementación consistió en llevar a la práctica el taller diseñado, con el propósito de favorecer el desarrollo del Pensamiento Variacional (PV) en docentes del nivel medio superior. Esta fase se desarrolló en sesiones presenciales, en las que se promovió la resolución de problemas y la construcción colegiada de actividades de enseñanza, alineadas con los principios del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y las demandas del nuevo Marco Curricular Común. La interacción entre los participantes permitió generar espacios de reflexión y colaboración, en los que se analizaron situaciones reales de variación y se diseñaron propuestas didácticas contextualizadas para el curso *Pensamiento Matemático 3*.

En un primer momento se les solicitó a los docentes que realizaran el diseño de actividades sobre el Pensamiento Variacional sin alguna instrucción previa, sólo con base a su experiencia debido a que los profesores asistentes al taller tienen al menos 10 años en servicio y todos han participado en la elaboración de módulos de aprendizaje (libros) y de reactivos. El resultado fue una Actividad inicial de cada uno de los participantes donde presentaron contextos extra-matemáticos:

- Docente 1: Actividad del recibo del agua
- Docente 2: Actividad valor del dinero
- Docente 3: Actividad de niveles de melatonina

No obstante, los docentes no lograron consolidar un producto completo orientado al desarrollo del Pensamiento Variacional. En particular, los docentes 1 y 3 únicamente lograron definir el contexto en el que podría llevarse a cabo la actividad, sin avanzar en la estructuración de la propuesta didáctica como se muestra en la Figura 3.

Figura 3
Actividades iniciales de los docentes

Docente 1

ACTIVIDAD DEL RECIBO DEL AGUA

El cuidado del agua es importante porque es un recurso vital para la supervivencia humana y el mantenimiento de los ecosistemas. El agua es esencial para la vida, y es necesaria para el consumo, la higiene, la producción de alimentos y la generación de energía. Sin agua, la vida tal como la conocemos no sería posible.

Imagen tomada de conservación-del-agua-importancia-y-tecnicas-2195

<https://www.google.com/search?q=la+importancia+del+agua&og=la+importancia+&as=chrome:1.696706122459340512245125.58590158&source=chrome&u=UTf-9Vh4d=4RI-ZORMpT-XPM&vss4=1>

- En equipos de 5 integrantes, analicen los datos del historial del consumo mensual en m³ del siguiente recibo del agua.

Docente 3

¿Cuánto necesitan dormir los adolescentes?

Los adolescentes necesitan de 8 a 10 horas de sueño por la noche, pero muchos de ellos duermen menos. No dormir lo suficiente puede hacer que resulte difícil prestar atención en clase y en el trabajo. Los adolescentes que no duermen lo suficiente son también más propensos a sufrir accidentes de tránsito y tienen un peor desempeño en la escuela o en la deporte. Tal vez estén de mal humor o deprimidos, o tengan otros problemas emocionales.

¿Por qué los adolescentes tienen problemas de sueño?

Los adolescentes no duermen las horas suficientes por distintos motivos:

En los adolescentes, el reloj biológico interno les indica que se duerman más tarde a la noche. El organismo libera melatonina, la hormona del sueño, más tarde por la noche en los adolescentes que en los niños y los adultos. Esto reinicia el reloj biológico interno del sueño de los adolescentes para que se duerman más tarde por la noche y se levanten más tarde por la mañana. La mayoría de los adolescentes no tiene sueño como para irse a dormir antes de las once de la noche.

El uso de dispositivos tecnológicos, como celulares, computadoras y TV, antes de ir a dormir puede dificultar conciliar el sueño. Las luces brillantes y la luz azul que proviene de los dispositivos electrónicos también retrasan la liberación de melatonina, lo que acentúa el problema.

Docente 2

Actividad Valor del dinero

Momento 1:

Para cubrir las necesidades de alimentación, casa, vestido, entre otras las personas trabajan para obtener una remuneración económica, sin embargo, pueden existir imprevistos o gastos planificados mayores a nuestros ingresos mensuales, para ello es necesario tener dinero disponible para cubrir estas necesidades. Tomando en cuenta esta situación contesta de manera individual las siguientes preguntas.

- ¿Crees que es importante ahorrar dinero?
- ¿En tu familia ahorran un porcentaje de tus ingresos mensuales?
- ¿De ser afirmativo, por qué razones ahorran?
- ¿Cuáles son las razones de no ahorrar en tu familia?

Momento 2:

Ahora, tomando como base a reflexionar al contestar las siguientes preguntas:

- ¿El valor del dinero es constante?
- ¿Crees que es la mejor opción es ahorrar?
- Si tu respuesta fue negativa a la pregunta 3 ¿Qué opción propones a tu familia en lugar de ahorrar?

A continuación, se presenta una tabla sobre la inflación de los últimos años

Año	Inflación
2010	3.38
2011	3.32
2012	2.84
2013	3.56
2014	3.16
2015	2.22
2016	2.97
2017	4.99
2018	4.28
2019	2.74
2020	2.68
2021	6.64
2022	7.18
2023	3.96

Fuente: <https://www.bancomundial.org/es/indicadores/precios/CalculadoraInflacion.aspx>

- ¿Qué representa la inflación?
- ¿Cuáles magnitudes están relacionadas en este contexto?
- ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿Cuál es la variable independiente?
- Realiza la gráfica de la inflación con respecto al tiempo
- ¿En qué periodo la inflación fue creciente?
- ¿Cuándo creció más la inflación?
- ¿Hay algún periodo en el que decreció la inflación?
- ¿Qué se conviene hacer para contrarrestar la inflación al momento de guardar nuestro dinero?

La siguiente gráfica muestra los niveles de melatonina por edad.

El máximo se alcanza al final de la infancia

En la pubertad sus niveles se reducen

Sigue descendiendo con la edad

Poca producción en los primeros años de vida

La siguiente gráfica muestra el nivel de melatonina en ciclo circadiano por grupos de edades.

5-10 años

10-30 años

30-50 años

50-60 años

60-70 años

Más de 70 años

Posteriormente, se realizó el proceso de instrucción sobre algunos elementos teóricos del EOS, tales como: significado institucional de referencia, sistemas de prácticas, objetos matemáticos, configuraciones ontosemióticas y los criterios de idoneidad didáctica. Esto para que tuvieran elementos que les permitieran rediseñar las actividades iniciales.

Significado institucional de referencia: se proporcionaron a los docentes tres posturas teóricas sobre el Pensamiento Variacional, con el objetivo de que seleccionaran aquella que se alineara con los propósitos de la Nueva Escuela Mexicana (SEP, 2019). Los docentes participantes optaron por asumir la postura de Carlos Vasco (2002) respecto al Pensamiento Variacional, por considerar que esta se articula con los principios pedagógicos de la Nueva Escuela Mexicana. Desde esta perspectiva, el pensamiento variacional se entiende como una forma de razonamiento que permite a los estudiantes interpretar y modelar fenómenos de cambio en contextos reales, favoreciendo el uso de herramientas matemáticas vinculadas a la vida cotidiana. Esta postura promueve una enseñanza centrada en la resolución de problemas en contextos de la comunidad, elementos que coinciden con el enfoque humanista, inclusivo y situado que se propone en el modelo educativo.

Configuraciones ontosemióticas: se obtienen a partir de la relación entre los objetos matemáticos primarios, y constituyen un elemento fundamental en el diseño de las actividades didácticas. Su incorporación permite observar y analizar las conexiones entre dichos objetos, favoreciendo una comprensión más profunda del conocimiento matemático. Para estructurar estas actividades, se utilizó el formato metodológico propuesto en el documento principal del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino et al., 2008).

Criterios de idoneidad: Al cuestionar a los docentes acerca de los elementos que consideran al diseñar tareas propias, mencionaron elementos como el tema que se desea abordar, el nivel o grado de profundidad, la complejidad, el tipo de problemas o situaciones, si se debe realizar individual o en equipos, las interacciones alumnos-docente, el tiempo que se le va a dedicar, que sea de interés para los estudiantes, si se puede vincular con otra asignatura, entre otras. Esto se puede asociar con los elementos propuestos en los Criterios de Idoneidad del EOS, donde se presentan más formalmente y con base en sustentos teóricos sólidos.

En el planteamiento de problemas el profesor debe proponer tareas asociadas al tema matemático correspondiente al nivel educativo y considerando aspectos relacionados con el currículo, grados anteriores o posteriores, y el contexto adecuado a las características, intereses y necesidades de los estudiantes. Los problemas planteados pueden ser diseños propios o adaptaciones de problemas de libros de texto u otras fuentes. En la Tabla 2, de

conformidad con los criterios de logro de las competencias establecidas en Pino-Fan et al. (2022), se muestra la rúbrica empleada para la recolección y análisis de datos, en la subcompetencia para plantear o proponer problemas.

Tabla 2

Niveles de logro de la subcompetencia matemática 2: Planteamiento de problemas

Nivel de logro	Criterios
L0	El profesor reproduce tanto el planteamiento de problemas como sus soluciones, sin considerar las características de estos, para lo cual hace uso de libros de texto o programas de la materia del grado en el que imparte clases, internet, etc., esto con el fin de establecer los problemas y tareas matemáticas que serán propuestos en el proceso de estudio.
L1	Propone problemas propios del grado educativo en el que se encuentra. Para ello considera aspectos relativos al currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos de sus estudiantes. Rediseña las tareas con respecto al objeto matemático estudiado en el momento, pero no prevé concepciones erróneas, errores, dificultades o distintas posibilidades de respuesta. Respecto de los problemas propuestos, estos en su mayoría son modificaciones (o adaptaciones) de problemas tomados de otras fuentes.
L2	El profesor propone problemas correspondientes al grado educativo, considerando aspectos relativos al currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos de sus estudiantes. Además, contempla para su propuesta, diversas respuestas plausibles, concepciones erróneas, conflictos o errores que pudieran surgir con respecto a la práctica matemática, los contextos más adecuados de acuerdo con las características de los estudiantes, los intereses y necesidades de los estudiantes. Los problemas pueden ser adaptaciones o modificaciones de problemas tomados de otras fuentes o diseños propios. En cualquier caso, el profesor no considera que distintos tipos de situaciones problema podrían requerir utilizar diferentes significados sobre la noción bajo estudio.
L3	Además de lo descrito en el nivel previo, en este nivel el profesor también considera nuevas tareas asociadas con la noción matemática bajo estudio, pero que agregan un reto para los estudiantes. Las tareas pueden y permiten vincular al objeto matemático estudiado con otros objetos matemáticos (propios del grado escolar o bien de grados anteriores o posteriores). Identifica los significados de las nociones matemáticas que propone estudiar, lo cual amplía su visión de tipos de situaciones/problemas en términos de los contextos en los que puede utilizarse tal noción (se consideran las conexiones intra y extra matemáticas de las nociones bajo estudio). En este nivel, no sólo se anticipa a conflictos o errores de los estudiantes, sino que a veces los induce intencionalmente para crear oportunidades de aprendizaje.

Nota. Fuente: Pino-Fan et al. (2022)

Se elaboró un instrumento de recolección de información con el propósito de determinar el nivel de logro de la subcompetencia matemática relacionada con el planteamiento de problemas (Tabla 3). Estos instrumentos permitieron identificar cómo los docentes abordan la formulación de situaciones problemáticas en el aula, así como el grado en que promueven el desarrollo de habilidades para plantear problemas matemáticos en sus estudiantes.

Tabla 3*Instrumento de recolección de datos para subcompetencia “Planteamiento de problemas”*

Indicador	Cumple	Observaciones
Sólo utiliza problemas de libros de texto u otras fuentes de información sin considerar las características que promuevan el estudio de la variación.		
Propone tareas adecuadas al Pensamiento Variacional.		
Toma en cuenta conocimientos previos y relacionados al currículo		
Considera respuestas plausibles, errores o dificultades de los estudiantes con la práctica matemática propuesta		
Adapta o modifica tareas tomadas de otras fuentes de acuerdo con los intereses y necesidades de sus estudiantes		
Considera nuevas tareas asociadas al tema matemáticos		
Identifica los significados de las nociones matemáticas que propone estudiar		
Anticipa conflictos o errores de los estudiantes para crear oportunidades de aprendizaje		
Considera conexiones intra y extra-matemáticos		

Actividades Iniciales

Los docentes que tomaron el taller cuentan con experiencia en el diseño de material didáctico, tales como módulos de aprendizaje, reactivos para concursos académicos, entre otros. Para la realización de las actividades iniciales se les solicitó el diseño de una actividad referente al Pensamiento Variacional sin instrucciones adicionales.

Docente 1. Nivel de logro L0

En el diseño de su primera actividad, el Docente 1 se valoró con un nivel L0, ya que no presentó una actividad completa, sólo puso la indicación de analizar los datos del historial del consumo del agua. Aun cuando la situación es en un contexto adecuado, no estableció alguna conexión con el estudio de la variación. Al no presentar indicaciones claras o preguntas, no se puede asegurar que la actividad se encuentre acorde al MCC, ya que no existe una relación clara de los objetos matemáticos a abordar, ni cómo influye el contexto en esta actividad.

Docente 2. Nivel de logro L1

El Docente 2 presenta una actividad donde se promueve el significado institucional pretendido que es el de Vasco, realizando cuestionamientos para determinar: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia? y ¿Cuánto cambia?, es acorde al

modelo educativo y a la UAC de Pensamiento Matemático 3. Se presenta en un contexto extra matemático, de interés para los estudiantes. Sin embargo, no considera errores o conflictos de las respuestas, ni tampoco se anticipa a introducirlos intencionalmente para crear oportunidades de aprendizaje.

Docente 3. Nivel de logro L0

El Docente 3 no presenta una actividad completa, sólo presenta un contexto adecuado para el estudio del Pensamiento Variacional, no se muestran cuestionamientos para promover algún objeto matemático.

Los docentes, aun con su experiencia en el diseño de materiales didácticos, tuvieron dificultades para plantear actividades sobre el pensamiento variacional, las cuales se encuentren acorde con la Nueva Escuela Mexicana. En el caso del docente 1 y 3, no fueron capaces de establecer un vínculo entre los objetos matemáticos del PV y los contextos utilizados. Se puede argumentar entonces la necesidad de capacitación docente con la introducción del MCC y las Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) del Pensamiento Matemático 3 (Pensamiento Variacional).

Rediseño de actividades

Al concluir la primera etapa del diseño de actividades, se brindó a los docentes una capacitación de los elementos fundamentales del Enfoque Ontosemiótico (EOS), así como en el uso adecuado de los formatos diseñados para su aplicación. Con estos nuevos referentes, los docentes participantes retomaron sus propuestas iniciales y procedieron a rediseñar actividades centradas en el desarrollo del Pensamiento Variacional, considerando promover las progresiones 3 y 4:

- P3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.
- P4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático (SEP, 2023, pp. 55-56).

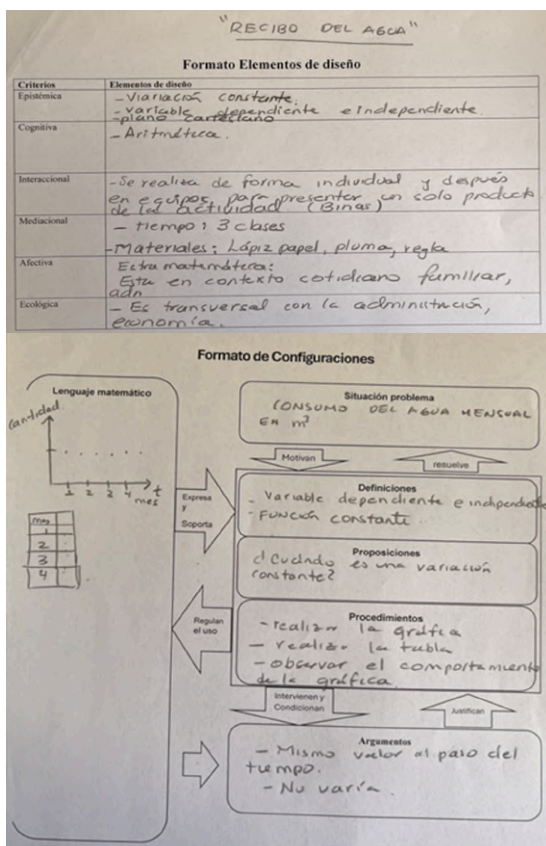
Docente 1

Al utilizar el formato de elementos del diseño, el docente muestra los objetos matemáticos que se pretenden abordar con la actividad, para lo cual menciona que sólo necesita conocimientos previos de aritmética para resolver la actividad, muestra cómo se deben realizar las interacciones en cada

momento de la actividad, el tiempo y los materiales a utilizar. Esta actividad aborda una situación de la economía familiar y el cuidado del agua. Es transversal a economía, administración y ecología. En el formato de configuraciones ontosemióticas el Docente 1 puso en juego los objetos matemáticos primarios, se promueve el uso de diferentes representaciones matemáticas, las definiciones de variables dependiente e independiente, la variación constante, con el fin de que los estudiantes argumenten que el consumo del agua es el mismo valor en cada mes (Figura 4).

Figura 4

Formatos de elementos del diseño y configuraciones del Docente 1



A continuación, en la Figura 5 se presenta la actividad rediseñada titulada "El recibo del agua", elaborada por el Docente 1 como parte del proceso de diseño colegiado. Esta actividad integra elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y busca promover el desarrollo del pensamiento variacional mediante la contextualización de situaciones reales.

Figura 5

Actividad rediseñada del Recibo del agua

El cuidado del agua es importante porque es un recurso vital para la supervivencia humana y el mantenimiento de los ecosistemas. El agua es esencial para la vida, y es necesaria para el consumo, la higiene, la producción de alimentos y la generación de energía. Sin agua, la vida tal como la conocemos no sería posible.



imagen tomada de conservación-del-agua-importancia-y-tecnicas-2195

<https://www.google.com/search?q=la+importancia+del+agua&og=la+importancia+&oe=chrome.1.69570512024603405120205125.58950015&sourceid=chrome&e=UTF-8&vid=4RLZORMqvI-XPM&vssid=1>

- I. En equipos de 5 integrantes, analicen los datos del historial del consumo mensual en m³ del siguiente recibo del agua.



1. ¿Cuáles magnitudes identifica en este estudio?
2. De acuerdo con el gráfico de barra, ¿cómo es el consumo del agua en el último año?
3. Realice un gráfico que represente el consumo en función del tiempo.
4. Realizar una tabla con los datos presentados.
5. ¿Cómo varía el consumo del agua en el periodo presentado?
6. ¿Cuánto pago mensual por el consumo de agua?
7. ¿Cuál sería el costo de un metro cúbico?
8. ¿Cuánto se esperaría que pague en el siguiente mes?
9. ¿Qué puedes concluir de esta situación?
10. Proponga una expresión analítica que represente el comportamiento del consumo de agua mensual.
- II. Posteriormente, utilizando uno de los recibos del consumo de agua de sus casas, responda a los siguientes cuestionamientos.
 1. Realiza un análisis de tu recibo, siguiendo las indicaciones de la primera parte.
 2. ¿Qué diferencia observa con respecto al recibo anterior?
- III. Considerando la tabla de tarifas en el municipio de Hermosillo (2024), responda las siguientes preguntas.
 1. ¿Cuánto pagaría si consumiera 23 metros cúbicos?
 2. ¿Cuánto pagaría si consumiera 59 metros cúbicos?
 3. Realiza un gráfico con la tarifa doméstica
 4. Interpreta el gráfico realizado
 5. Proporciona la expresión analítica
 6. Si pagaste \$1508.22, ¿cuántos metros cúbicos se consumió?
 7. ¿Por qué considera que existen diferentes rangos en las tarifas?

Docente 2

Durante el proceso de rediseño de la actividad, el Docente 2 incorporó en el formato de Elementos del Diseño diversos aspectos clave del Pensamiento Variacional. Entre los que destacan la variación creciente y decreciente, el uso de variables dependientes e independientes, así como la noción de rapidez de cambio. Para abordar estos conceptos, se considera necesario que los estudiantes tengan conocimientos previos sobre el plano cartesiano, la ubicación de puntos en el plano y las relaciones matemáticas entre variables.

La actividad propuesta se estructura en dos momentos, los cuales se desarrollan de manera individual en dos sesiones. Los recursos definidos para su implementación son: lápiz, borrador y el documento impreso de la actividad. El docente señala que se trata de una actividad de interés para los estudiantes, ya que aborda el valor del dinero, estableciendo una transversalidad con la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Economía I. Además, se especifica que debe trabajarse dentro de la progresión 3 de la UAC de Pensamiento Matemático 3.

En cuanto a la configuración ontosemiótica, el docente presenta como situación problema el crecimiento y decrecimiento de la inflación. Para ello, se trabaja con las definiciones de variable dependiente e independiente, utilizando procedimientos gráficos y tabulares. El lenguaje matemático empleado incluye representaciones gráficas, simbólicas y algebraicas (ver Figura 6). Finalmente, se solicita a los estudiantes que argumenten cómo se podría contrarrestar la inflación, promoviendo así el desarrollo de habilidades de análisis y argumentación matemática en contextos reales.

Figura 6

Formatos de elementos del diseño y configuraciones del Docente 2

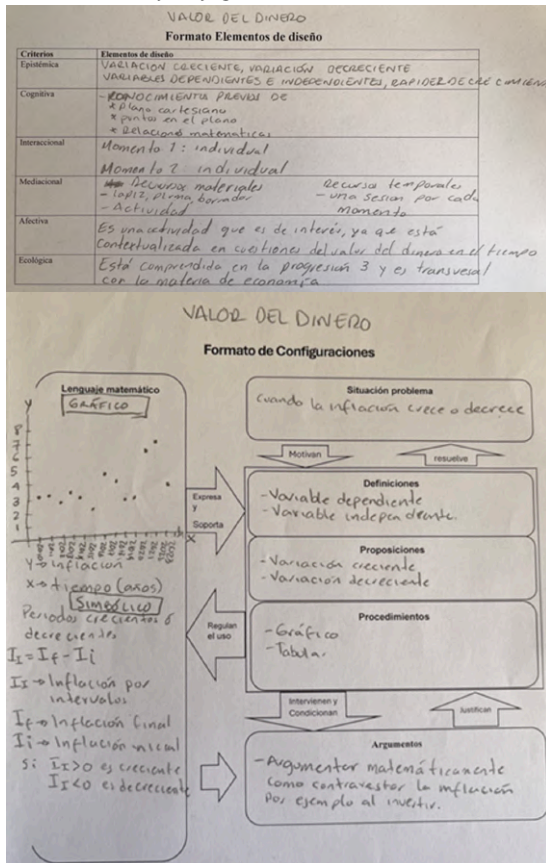
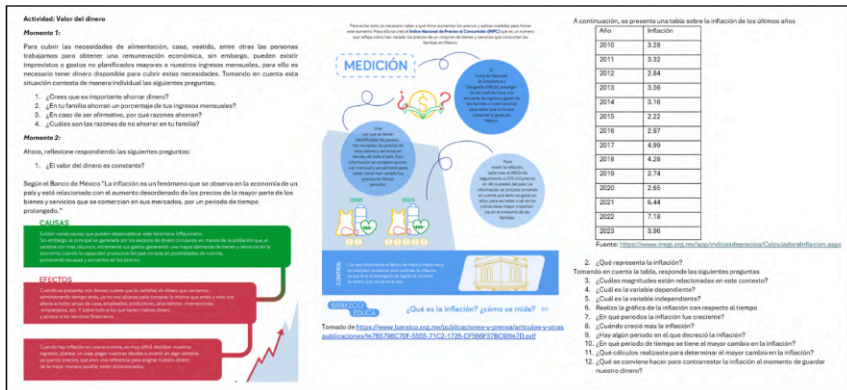


Figura 7

Actividad rediseñada del Valor del dinero



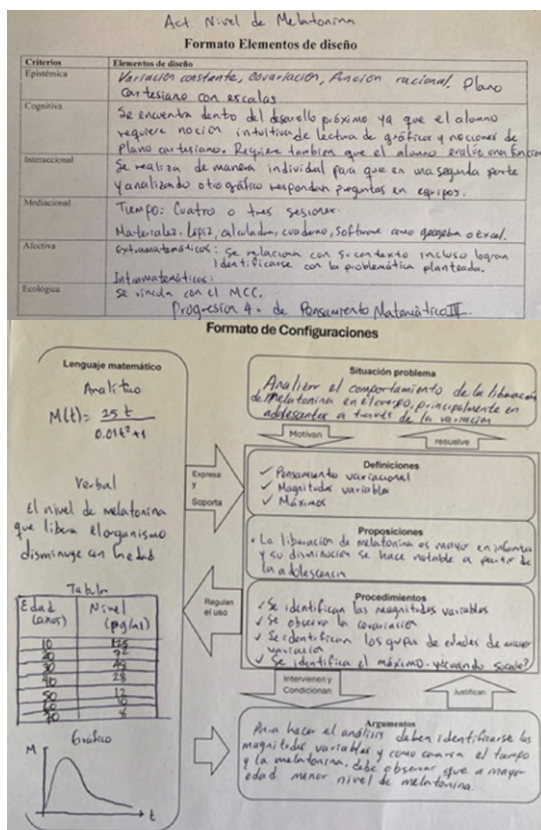
En la Figura 7 se presenta la actividad rediseñada titulada “El valor del dinero”, elaborada por el Docente 2 como parte del proceso de diseño colegiado. Esta propuesta busca fomentar el pensamiento variacional mediante el análisis de la variación de inflación y cómo repercute en el valor real del dinero.

Docente 3

En el Formato de Elementos del Diseño correspondiente al Docente 3, se observa que la actividad promueve el análisis de la variación creciente y decreciente. Para su desarrollo, se señala que los estudiantes deben contar con nociones intuitivas sobre la lectura de gráficas y el uso del plano cartesiano, además de requerirse que cuantifiquen la variación presentada.

Figura 8

Formatos de elementos del diseño y configuraciones del Docente 3



La actividad está estructurada en momentos de trabajo individual y colaborativo, con una duración estimada de tres a cuatro sesiones. Los recursos

materiales considerados son: lápiz, cuaderno, calculadora y los softwares GeoGebra y Excel. La propuesta se enmarca en un contexto extra matemático y se recomienda su implementación en la progresión 4 del MCC.

En la Configuración Ontosemiótica del Docente 3 se plantea como situación problema el análisis del comportamiento de la liberación de melatonina a lo largo del tiempo, mediante el estudio de la variación. Las definiciones que se busca promover en esta actividad incluyen el pensamiento variacional, las magnitudes variables, los máximos, así como la comprensión del comportamiento de la melatonina a partir de la adolescencia. El procedimiento propuesto consiste en definir las magnitudes variables involucradas, observar la covariación entre ellas, identificar los grupos de edad con mayor variación e identificar el valor máximo. Para ello, se recurre al uso del lenguaje natural, así como a representaciones en tablas y gráficas (Figura 8).

A continuación, en la Figura 9 se presenta la actividad rediseñada titulada “El nivel de melatonina”, elaborada por el Docente 3 como parte del proceso de diseño colegiado. Esta actividad busca promover el pensamiento variacional mediante el análisis de una situación contextualizada que relaciona los niveles hormonales con los ciclos de sueño, permitiendo a los estudiantes identificar variaciones funcionales en un contexto significativo.

Figura 9

Actividad rediseñada del nivel de melatonina

Actividad: ¿Cuánto necesitan dormir los adolescentes?

Los adolescentes necesitan de 8 a 10 horas de sueño por la noche, pero muchos de ellos duermen menos. No dormir lo suficiente puede hacer que resulte difícil prestar atención en clase y en el trabajo. Los adolescentes que no duermen lo suficiente son también más propensos a sufrir accidentes de tránsito y tienen un peor desempeño en la escuela o en los deportes. Tal vez estén de mal humor o deprimidos, o tengan otros problemas emocionales.

¿Por qué los adolescentes tienen problemas de sueño?

Los adolescentes no duermen las horas suficientes por distintos motivos:

En los adolescentes, el reloj biológico interno les indica que se duerman más tarde a la noche. El organismo libera *melatonina*, la hormona del sueño, más tarde por la noche en los adolescentes que en los niños y los adultos. Esto reinicia el reloj biológico interno del sueño de los adolescentes para que se duerman más tarde por la noche y se levanten más tarde por la mañana. La mayoría de los adolescentes no tiene sueño como para irse a dormir antes de las once de la noche.

El uso de dispositivos tecnológicos, como celulares, computadoras y TV, antes de irse a dormir puede dificultar conciliar el sueño. Las luces brillantes y la luz azul que proviene de los dispositivos electrónicos también retrasan la liberación de melatonina, lo que acentúa el problema.

La gráfica siguiente muestra el nivel de melatonina en ciclo circadiano (ciclo natural de cambios físicos, mentales y de comportamiento que experimenta el cuerpo en un ciclo de 24 horas) por grupos de edades.

<https://productos.piaja.es/consejo/melatonina-hormona-sueno>

- Según la gráfica y lo descrito, ¿qué magnitudes se encuentran presentes en el contexto?
- ¿Cuáles de estas magnitudes son variables o constantes?
- En el caso de las magnitudes que consideres variables, ¿si se modifica una de ellas, repercute o afecta a alguna otra?
- Menciona en qué casos puede presentarse esta situación.
- Describe de manera general el comportamiento de la gráfica.
- Explica cómo varía el nivel de melatonina de las 8 am a las 10 pm.

- ¿Cómo es el nivel de melatonina en el grupo de edad de 5 a 10 comparado con el grupo de edad de 15 a 35 años?
- ¿A qué hora se muestra el mayor nivel de melatonina según el gráfico?

En este otro gráfico se ve muestra la cantidad liberada de melatonina en pg/ml según la edad en años.

<https://estadodemelatonina.com/wp-content/uploads/2020/05/04.jpg>

- ¿A qué edad se alcanza el máximo nivel de producción de melatonina?
- ¿Qué pasa después de los 10 años de edad?
- ¿Cómo relacionas la respuesta a la pregunta anterior con el hecho de que los adolescentes tienden a tener otro horario de sueño?
- Describe de manera general el comportamiento de la gráfica.

Suponga que la siguiente función modela la producción de melatonina según la edad del individuo:

$$M(x) = \frac{25x}{0.01x^2 + 1}$$

- Realiza una tabla de valores que muestre la variación entre las magnitudes involucradas.
- Realiza una gráfica con los valores de tu tabla anterior.
- Según tu gráfica, ¿a qué edad se alcanza el máximo nivel de producción de melatonina?
- ¿Cuál es el nivel máximo de producción de melatonina?
- Describe cómo varía la producción de melatonina en los primeros 10 años de vida.
- Describe cómo varía la producción de melatonina en los segundos 10 años de vida (de 11 a 20 años).
- ¿Cuál es el dominio de la función? Escribe una expresión mediante intervalo.
- ¿Cuál es el rango de la función? Escribe una expresión mediante intervalo.
- ¿Qué tipo de función es, según la clasificación de funciones?
- ¿Qué te pareció la actividad, consideras que los adolescentes tienen diferentes hábitos de sueño?
- ¿Cuánto consideras que deben dormir los adolescentes y por qué es importante?

Valoración del rediseño de las actividades

Una vez concluidos los diseños de las actividades por parte de los profesores durante el taller sobre el desarrollo del Pensamiento Variacional, se realizó una valoración final utilizando los niveles de logro de la subcompetencia de Planteamiento de problemas (Tabla 2), con el fin de evaluar la mejora en la calidad de las propuestas didácticas. Los resultados evidencian un avance significativo: mientras que al inicio del proceso todos los docentes se encontraban en el nivel L0 y L1, al finalizar el taller todos lograron posicionarse en el nivel L2. Este cambio indica una mayor capacidad para diseñar actividades sobre el PV en contextos cotidianos, que lo promuevan de manera efectiva en el aula y que reflejan una comprensión de los procesos de variación.

Docente 1. Nivel de Logro L2

El docente considera los conocimientos previos de los estudiantes y, en su diseño, incorpora procedimientos, representaciones, proposiciones, argumentos y objetos matemáticos relevantes, incluyendo aquellos que pueden emerger durante la práctica. El contexto elegido es estudio de la variación en un entorno familiar, el cual resulta cercano a los estudiantes, lo que favorece la apropiación de los conceptos. Además, plantea cuestionamientos clave como: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia? y ¿Cuánto cambia?, con el propósito de promover el significado institucional del Pensamiento Variacional propuesto por Vasco (2003). La actividad está enfocada en el estudio de la variación constante.

Docente 2. Nivel de Logro L2

El docente presenta una actividad que promueve el significado institucional pretendido según Vasco (2003), mediante cuestionamientos orientados a identificar: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia? y ¿Cuánto cambia? Esta propuesta se encuentra alineada con el modelo educativo y con la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de Pensamiento Matemático 3. Asimismo, se consideran los conocimientos previos de los estudiantes y se integran procedimientos, diversas representaciones, proposiciones, argumentos y objetos matemáticos tanto preexistentes como emergentes en la práctica. El contexto seleccionado, “El valor del dinero”, resulta relevante para los estudiantes, al tratarse de un tema de interés común y cotidiano. Cabe señalar que, en esta actividad, no se introducen intencionalmente conflictos o errores como estrategia para generar oportunidades de aprendizaje.

Docente 3. Nivel de logro L2

El docente propone una actividad alineada al currículo, abordando la problemática de la falta de sueño en los estudiantes y su relación con los

niveles de melatonina, lo cual permite contextualizar el estudio de la variación en un entorno cotidiano. En el diseño se consideran los conocimientos previos, los recursos necesarios, las posibles interacciones y algunas complicaciones que podrían surgir durante su implementación. Además, se plantean cuestionamientos clave como: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia? y ¿Cuánto cambia?, con el propósito de promover el significado institucional del Pensamiento Variacional propuesto por Vasco (2003).

A continuación, en la Tabla 4 se presenta la valoración del tránsito desde el nivel inicial hasta el logrado por los docentes, con base en los descriptores establecidos en el instrumento de evaluación correspondiente a la subcompetencia de *planteamiento de problemas*.

Tabla 4

Valoración de tránsito del nivel inicial al logrado

	Nivel inicial	Nivel de logro
Docente 1	L0 En la actividad inicial el docente sólo presenta el contexto sin diseñar una tarea adecuada para el estudio de la variación.	L2 En el rediseño la actividad ya toma en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, se promueve el significado institucional de referencia y el uso de diferentes representaciones para el estudio de la variación, con un diseño propio. Pero no anticipa conflictos u errores de estudiantes para crear oportunidades de aprendizaje, ni considera nuevas tareas asociadas, ni lo vincula con otros objetos matemáticos; por ello alcanza un nivel de logro L2.
Docente 2	L1 El docente en la actividad inicial presenta un contexto adecuado para el estudio de la variación, utilizando preguntas para analizar el cambio del valor del dinero. Pero no considera diversas respuestas plausibles, conflictos o errores que pudieran surgir en la práctica matemática.	L2 En el rediseño, además de los elementos que había considerado en la actividad inicial, toma en cuenta conocimientos previos de sus estudiantes de acuerdo con currículo para el estudio de la variación mediante un diseño propio, considerando algunos errores o dificultades que se podrían presentar, pero no los induce intencionalmente para crear oportunidades de aprendizaje,
Docente 3	L0 El docente considera un contexto adecuado a las características, intereses y necesidades de los estudiantes, usando la hormona que regula el sueño (melatonina). Sin embargo, no logra desarrollar cuestionamientos que promuevan el estudio de la variación.	L2 En el rediseño presenta una actividad de diseño propio, correspondiente al grado educativo de los estudiantes, tomando en cuenta los objetos matemáticos que intervienen y que emergen de la práctica, donde se fomenta el análisis de situación mediante los cuestionamientos ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? Pero no considera nuevas tareas asociadas a la variación como la derivada (razón instantánea de cambio), ni promueve nuevas oportunidades de aprendizaje con los errores o conflictos de los estudiantes.

Conclusión

La implementación del taller sobre el Pensamiento Variacional les permitió a los profesores de bachillerato participantes realizar el diseño de materiales didácticos en colegiado, acordes al MCC de la EMS, concibiendo al profesor como diseñador de tareas y utilizando contextos extramatemáticos que abordan situaciones de la comunidad y su entorno. Cabe mencionar que estos diseños cuentan con sustento teórico-metodológico debido a que se les proporcionó capacitación sobre el uso de algunas herramientas del EOS tales como: significado institucional de referencia, objetos matemáticos primarios, configuraciones ontosemióticas, idoneidad didáctica; además, se promovió el desarrollo de las competencias profesionales para el profesor de matemáticas del modelo CCDM en lo referente al Pensamiento Variacional.

Por otra parte, dado que el nivel inicial de los docentes participantes en el taller se caracterizó como bajo, sin que necesariamente sea una muestra representativa de todos los profesores de bachillerato, proporciona evidencias de la necesidad de realizar intervenciones de formación y actualización que trascienda a las actividades realizadas para dar a conocer el nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior.

Además, se puso de manifiesto la necesidad de que los profesores tuvieran una postura sobre lo que debe entenderse por pensamiento variacional y también que contaran con orientaciones teóricas que den sustento a los diseños didácticos. Asimismo, se puso de manifiesto la importancia del trabajo de codiseño pues sólo con la discusión colectiva de las actividades propuestas fue posible consensuar la forma que tomaron las actividades para trabajar con los estudiantes. Lo anterior, puede contribuir a disminuir el riesgo de que la falta de orientaciones sobre el diseño de actividades conduzca a que los profesores desarrollen sus prácticas docentes con base en lo que ya realizaban antes de que se propusiera el nuevo marco curricular común.

El diseño colegiado de actividades permitió desarrollar el pensamiento variacional en los profesores de bachillerato que impartirán los cursos de Pensamiento Matemático 3, al incrementar al menos en un nivel de su estado inicial, al involucrarlos en procesos de reflexión y construcción didáctica. La incorporación de los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) no solo facilitó la elaboración de propuestas coherentes con los objetivos del curso Pensamiento Matemático 3, sino que también promovió una revisión crítica de su práctica docente.

Referencias

- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato. En L. Sosa, J. Hernández y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 274–281). Red Cimates.
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en el bachillerato. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26 (pp. 1585–1593). CLAME.
- Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, CINVESTAV-IPN].
<https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/5716>
- Cabrera, L., Ruiz, P., & Galaviz, J. G. (2023). Estudio exploratorio sobre el pensamiento y lenguaje variacional en los libros de texto gratuitos de primaria en México. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 8, 1–24.
<https://doi.org/10.46618/iime.181>
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.
<https://doi.org/10.2307/4149958>
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(2), 7–37.
- Lovio-Fragoso, J., Hayano-Kanashiro, C., & López-Elías, J. (2019). Effect of different phosphorus concentrations on growth and biochemical composition of *Chaetoceros muelleri*. *Latin American Journal of Aquatic Research*, 47(2): 361–366.
<https://doi.org/10.3856/vol47-issue2-fulltext-17>
- Jiménez, J. R., Grijalva, A., Milner, F., Dávila, T., & Romero, C. (2022). *Reconceptualización didáctica del cálculo*. Universidad de Sonora.
- Palafox, M., & Grijalva, A. (2023). El desarrollo del Pensamiento Variacional. En Scot, P., Morales, Y., & Ruiz A. (Eds.), *Memorias XVI CLAEM*. (pp. 302–308). Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., & Font, V. (2022). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(5). <https://doi.org/k6dt>
- Reyes-Gasperini, D., Palmeri, L. F., & Cantoral, R. (2019). Empoderamiento docente: Variación y predicción en matemáticas. *La matematica e la sua didattica*, 27(2), 141–159.
- Secretaría de Educación Pública. (2023). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático*. Subsecretaría de Educación Media Superior. <https://bit.ly/43D9IyW>

- Secretaría de Educación Pública. (2019). *Rediseño del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior 2019–2022*. Dirección General del Bachillerato. <https://bit.ly/3LaejT7>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Trejo, M., Ferrari, M., & Martínez, G. (2021). Covariación logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas: Un estudio de caso. *Educación Matemática*, 33(1), 41–70. <https://doi.org/10.24844/EM3301.02>
- Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*, Bogotá, Colombia.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. En *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas* (pp. 61–70). Ministerio de Educación Nacional (Colombia).
- Villa-Ochoa, J. (2020). Razonar con la covariación: Un estudio sobre estrategias en formación de profesores. En Morales-López Y., & Ruíz A. (Eds.), *Actas del CIAEM* (pp. 44–55). CIAEM.

 Autor de correspondencia

Martha Cecilia Palafox Duarte | martha.palafox@unison.mx