



La fracción unitaria desde una relación recíproca de tamaño relativo; la constitución de objetos mentales en la escuela primaria

The unit fraction from a reciprocal relationship of relative size; the constitution of mental objects in elementary school

Ivette Anel Delgado Valdez  | 1975403012@alumnos.upn.mx
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas – 321

Luis Manuel Aguayo Rendón  | laguayo@upn.mx
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas – 321

Recepción: 22 de mayo de 2025 | Aceptación: 27 de junio de 2025

Resumen

Este artículo muestra los resultados de un experimento de diseño basado en la Educación Matemática Realista para la constitución de objetos mentales sobre fracciones unitarias por alumnos de quinto grado de primaria. Nuestra hipótesis plantea que abordar la fracción mediante un modelo centrado en la medida ayuda a los estudiantes a interpretar nociones más complejas, como las fracciones impropias. En el estudio se analizan las interacciones de una práctica matemática centrada en la iteración de subunidades independientes de la unidad de referencia, el propósito es superar las limitaciones conceptuales del modelo basado en el significado parte-todo. En los resultados se observa que los estudiantes comprenden la fracción unitaria como una relación recíproca de tamaño relativo respecto a la unidad, lo que posibilita su transición hacia una concepción multiplicativa del número fraccionario, por lo anterior puede decirse que la investigación aporta elementos teóricos y metodológicos para el posterior diseño de propuestas instruccionales más sólidas para la enseñanza de la representación fraccionaria del número racional en la educación básica.

Palabras clave

Fracción unitaria, valor recíproco de tamaño relativo, educación matemática realista, experimento de diseño.

Abstract

This article presents the results of an experiment based on Realistic Mathematics Education for the construction of mental objects on unit fractions by fifth-grade elementary school students. Our hypothesis is that approaching fractions through a model focused on measurement helps students interpret more complex notions, such as improper fractions. The study analyzes the interactions of a mathematical practice focused on the iteration of subunits that are independent of the reference unit, with the aim of overcoming the conceptual limitations of the part-whole model. The results show that students understand the unit fraction as a reciprocal relationship of relative size with respect to the unit, which enables their transition to a multiplicative conception of fractional numbers. Therefore, it can be said that the research provides theoretical and methodological elements for the subsequent design of more solid instructional proposals for teaching the fractional representation of rational numbers in basic education.

Keywords

Unit fraction, reciprocal value of relative size, realistic mathematics education, design experiment.

Introducción

La enseñanza de las fracciones tiene implicaciones en el desarrollo y la apropiación de nociones matemáticas más complejas (Thompson y Saldanha, 2003), por ejemplo, en el álgebra. Usualmente, el modelo parte-todo ha sido el punto de partida para enseñar fracciones porque facilita la comprensión de la equipartición, donde los estudiantes interpretan la fracción $\frac{a}{b}$ como “ a ” partes de un total de “ b ” partes. Generalmente no tienen dificultades para entender fracciones como $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ etc., ya que intuitivamente se puede pensar que significan tomar x partes de un todo dividido en y partes.

Esto ha permitido considerar la factibilidad de este modelo para introducir la representación fraccionaria de los números racionales, aunque sus limitaciones aparecen cuando se introducen fracciones impropias como $\frac{6}{5}$, donde resulta contradictorio intentar “tomar seis partes de un total de cinco”, o cuando se abordan operaciones como $8 \div \frac{2}{3}$, en las que es difícil interpretar que se deben dividir “ocho enteros entre dos partes de tres partes”. Estos ejemplos muestran que, en ciertas situaciones, el modelo “parte todo” genera la construcción de nociones en las que concibe a la parte como algo inherente o incluido en la unidad de referencia, lo que obstaculiza una comprensión más profunda de los números fraccionarios.

En el currículo mexicano, las fracciones se incluyen mediante la articulación progresiva de los significados de la fracción (parte-todo, medida, razón, cociente y operador), con lo que se espera que los estudiantes

comprendan totalmente al número racional sin considerar su complejidad. Este se vuelve un concepto difícil porque “consta de varios constructos, y es necesario comprender la confluencia de estos” (Hannula, 2003, p. 17).

Una caracterización de las fracciones alternativa a la de Kieren es la de Freudenthal (1983), quien propone una enseñanza basada en la comparación de fracciones como medidas, que se refuerza con el razonamiento multiplicativo descrito por Thompson y Saldanha (2003) y con los principios de la Educación Matemática Realista. Esta propuesta ha sido retomada por Cortina y Visnovska (2008, 2014, 2017, 2018) para diseñar una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) e introducir las fracciones como medidas de longitud.

Esta TEDE se ha puesto a prueba en diferentes contextos para evaluar su viabilidad y proponerla como un recurso útil para docentes e investigadores. A partir de los resultados se sostiene que las fracciones unitarias deben abordarse como una herramienta para cuantificar relaciones recíprocas mediante la multiplicación de una magnitud por un número entero, lo que permite introducir el concepto de fracción prescindiendo del modelo parte-todo (Cortina et al., 2013).

Marco teórico: Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR), desarrollada por Hans Freudenthal, promueve la reinención de las matemáticas a través de la matematización del mundo real en sustitución de la transmisión matemática “prefabricada”, entendida como la enseñanza del producto final de la actividad de los matemáticos (Cobb et al., 2008).

En la EMR se considera que los docentes son, por mucho, los agentes educativos más importantes, por lo que se busca desarrollar recursos que apoyen su labor educativa. Sin embargo, esta acción va más allá de generar actividades y materiales, pues se refiere más bien al desarrollo de recursos teóricos que puedan ayudar a prever cómo progresa el aprendizaje de los alumnos y a tomar decisiones sobre la enseñanza. Estos recursos se conocen como Teorías de Enseñanza en un Dominio Específico (TEDE) (Delgado y Cortina, 2021).

Por otra parte, la EMR asume que a pesar de reconocer que los matemáticos comienzan enfrentando problemas cuya solución implica la construcción de conceptos y estrategias, tradicionalmente la escuela ha invertido este orden natural del quehacer matemático, introduciendo primero la teoría y priorizando la técnica de solución por encima de la comprensión. Por esta razón, la EMR propone recuperar en las aulas la actividad matemática como descubrimiento, en la que los objetos de aprendizaje sean reales y significativos para los estudiantes (Freudenthal, 1983); pero lo real no se concibe sólo

como lo tangible, sino como todo aquello que el estudiante logra proyectar en su mente como situación imaginable y con sentido (Zapata-Cardona, 2020). Para ello se han desarrollado cuatro pilares teóricos: *la fenomenología didáctica* (Freudenthal, 1983), *la reinención guiada* (Freudenthal, 1991), *la matematización progresiva* (Treffers, 1987) y *los niveles de aprendizaje* (Van Hiele, 1999).

El propósito de la *fenomenología didáctica* es identificar manifestaciones y usos de objetos matemáticos, tal como se dan en la vida cotidiana, para elaborar situaciones de enseñanza que evoquen procedimientos de solución paradigmáticos, fomentando así su matematización. El docente guía a los estudiantes en esa matematización mediante un proceso que simula la invención de los matemáticos; esta *reinención guiada* implica guiar a los alumnos para que «vivencien» esta progresión como un logro del quehacer matematizado” (Delgado & Cortina, 2021).

Esta idea es retomada por Gravemeijer (2000) para proponer la *matematización progresiva* como principio estructurante de la enseñanza, desde la cual se asume que enseñar matemáticas implica fomentar la matematización, “la matemática como actividad humana es una actividad de resolución de problemas (...) también una actividad de organización de una disciplina” (Gravemeijer, 2000, p. 3). En este proceso de matematización progresiva hay *niveles de aprendizaje* (situacional, referencial, general y formal) sin una jerarquía estricta, pero que permiten comprender la evolución de las estrategias cognitivas de los estudiantes (Van Hiele, 1999).

Estos pilares dan lugar a la organización de principios (de actividad, de realidad, de reinención, de niveles, de interacción y de interconexión) que orientan la práctica de los profesores y permiten analizar las dinámicas de aula para comprender cómo se construye el conocimiento matemático en la interacción entre estudiantes y docente (Bressan et al., 2005; Zolkower et al., 2020). Bajo estos principios no se pretende que los alumnos construyan conceptos, sino que primero constituyan objetos mentales, es decir representaciones y modelizaciones de las experiencias que se constituyen en la mente de una persona, que no son otra cosa que la descripción del campo semántico personal relacionado con los significados específicos de un concepto vinculado a un contexto particular de uso. Los objetos mentales se refieren a la idea más humana de las matemáticas, pues son el conocimiento que una persona tiene acerca de un concepto, pero no de forma enciclopédica, sino de la forma natural en la que el significado se aplica en el uso.

El objeto mental de un alumno sobre un concepto matemático mejora cuando logra resolver una gama amplia de problemas que se relacionan con los distintos fenómenos que organiza el concepto (..) así se dice que su objeto mental está más próximo a la adquisición del concepto. (Valenzuela, 2019, p. 164)

La fenomenología de las fracciones

Uno de los postulados de la EMR vincula la fenomenología con la comprensión del concepto de fracción. El análisis fenomenológico de Freudenthal (1983) subraya que la fracción como “parte de un todo” posee un nivel de concreción que se asume como único enfoque válido, aunque en ese caso la fracción se restringe a la subdivisión del todo, lo que impide reconocer su potencial para expresar relaciones multiplicativas que se pueden formular con la expresión n veces.

Freudenthal (1983) destaca el papel que desempeñan la equivalencia y las fracciones en relación con las magnitudes, pero su análisis no se ha traducido en propuestas didácticas. Esto se debe a que una comprensión madura del concepto de fracción requiere articular diversos esquemas conceptuales: medición, proporcionalidad, razonamiento multiplicativo y fracción, que permiten interpretar las fracciones como expresiones de una *relación recíproca de tamaño relativo* (Thompson & Saldanha, 2003).

A partir de las contribuciones de Freudenthal (1983), Thompson y Saldanha (2003), la propuesta que aquí se plantea concibe la fracción como un número con capacidad de cuantificación, que permite representar relaciones entre cantidades. Esta perspectiva se apoya en el concepto de *relación recíproca de tamaño relativo*, donde si “ A es $\frac{1}{n}$ el tamaño de B , entonces B es n veces mayor que A ” (Thompson & Saldanha, 2003, p. 30). Bajo esta premisa se busca introducir el concepto de fracción unitaria, tomando distancia del modelo que da mayor énfasis a la relación parte-todo.

Marco metodológico

La investigación se enmarca en el Experimento de Diseño de naturaleza cualitativa, desarrollado en el campo de las Ciencias del Aprendizaje bajo la influencia de Cobb et al. (2003) y su propósito es diseñar formas de aprendizaje para estudiarlas en contextos definidos mediante ciclos de prueba, revisión e iteración, con el fin de comprender la ecología del aprendizaje como sistema complejo.

En un Experimento de Diseño se busca crear condiciones para el desarrollo de una *Teoría Hipotética de Aprendizaje* (THA), que contempla las hipótesis sobre el aprendizaje de los estudiantes, y una *Teoría Conjeturada de Instrucción*, que guía la actuación docente. Ambas teorías orientan la planificación, el diseño de medios didácticos y el análisis posterior de los resultados a través de un análisis retrospectivo que permite evaluar si se alcanzaron los objetivos propuestos (Luna & Aguayo, 2021).

El tipo de estudio más común en esta metodología son los experimentos de enseñanza, que consisten en una secuencia de episodios instruccionales donde participan un docente-investigador, un grupo de estudiantes y obser-

vadores-investigadores (Steffe & Thompson, 2000). Esta modalidad permite investigar la interacción entre teoría educativa, artefactos diseñados y práctica docente.

El objetivo central de estos experimentos no es generalizar resultados, sino estudiar la naturaleza del desarrollo de ideas, herramientas o modelos involucrados en los procesos de aprendizaje de estudiantes, docentes o grupos escolares (Molina et al., 2006). Su enfoque es cíclico: la planeación, ejecución y análisis permiten un rediseño constante que alimenta futuras investigaciones bajo nuevas variables.

La integración del Experimento de Diseño con el Experimento de Enseñanza busca desarrollar modelos teóricos empíricamente sustentados relacionados con un dominio de aprendizaje específico. A partir de ello, se genera una *Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico* (TEDE), con objetivos que orientan la intervención y los medios instruccionales necesarios para alcanzarlos.

Tabla 1

La TEDE para las fracciones

Práctica	Herramientas
1. Interpretar un número entero como medida que da cuenta de la longitud de una unidad. <i>Entender la medición como la iteración de una unidad.</i>	Tije, tiras de papel, tijeras
2. Reconocer y comparar el tamaño relativo de una subunidad de medida. <i>Comparar fracciones unitarias</i>	Tije, cilindros de papel, tijeras
3. Interpretar fracciones como medidas que resultan de iterar una subunidad de medida y comparar las medidas con el tamaño de la unidad. <i>Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a una unidad</i>	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras
4. Interpretar fracciones como medidas menores, mayores o iguales a medidas realizadas iterando la unidad. <i>Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a la iteración de la unidad dos o más veces</i>	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras, recta numérica
5. Interpretar fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces. <i>Multiplicar una fracción por un número entero</i>	Recta numérica
6. Interpretar fracciones como medidas de longitud menores, iguales o mayores a un medio. <i>Establecer igualdades y desigualdades con un medio</i>	Recta numérica

Nota. Parte de este estudio se reporta en la Revista Educación Matemática, Vol 36 (3), pp. 37–64

En este estudio, la TEDE tiene como propósito favorecer una comprensión compleja de las fracciones entendidas como expresión del tamaño de una

magnitud, que propone una progresión de objetivos de aprendizaje (agenda instruccional), analizada y puesta a prueba en una escuela primaria ubicada en la Ciudad de México, con un grupo de quinto grado conformado por 31 estudiantes (16 niñas y 15 niños), con edades entre 11 y 12 años. La agenda incluyó seis prácticas matemáticas (ver Tabla 1), las cuales contienen un objetivo específico como base para su replicabilidad. Estas se trabajaron a lo largo de 26 sesiones de 90 minutos cada una; cada clase fue videograbada, transcrita y analizada retrospectivamente. En este artículo se presentan los resultados de la segunda práctica.

Diseño de la segunda práctica

En coherencia con el principio de realidad de la EMR, la agenda que dio contenido a la TEDE se contextualizó en una narrativa sobre la historia de un antiguo pueblo ficticio, los Ajacay, quienes necesitaban realizar mediciones para la elaboración de sus productos de alfarería. Para ello, utilizaban una unidad no convencional: la vara de Kía o *Tije*, de aproximadamente 24 cm de longitud.

En la primera práctica, los estudiantes trabajaron la reconstrucción del significado de la medición como práctica social relevante, comprendieron la necesidad de contar con unidades estandarizadas para representar con precisión el tamaño de una longitud y utilizaron la vara de Kía o *Tije* como unidad de medida o referencia estándar.

Conforme avanzó la actividad, midieron su estatura, descubriendo, por ejemplo, que alguien era mayor a cinco *Tijes*, pero menor a seis, lo que evidenció la insuficiencia de la unidad para expresar su estatura con precisión. Este desafío reorientó la práctica para buscar herramientas que permitieran incluir ese “cachito” adicional no expresado en *Tijes* enteros.

Esta situación condujo al desarrollo de la segunda práctica, cuyo análisis se presenta en este artículo. En esta, el objetivo era que los estudiantes reconocieran el tamaño relativo de una subunidad de medida en relación con la unidad (*Tije*), lo que implica comprender el valor de una *fracción unitaria* sin interpretar las subunidades desde el significado de parte-todo, sino considerándolas como unidades de medida iterables, separadas de la cosa medida (Thompson & Saldanha, 2003).

Por la razón anterior, las subunidades físicas no se elaboraron cortando el *Tije*, lo que hubiera reforzado la noción de fracción como parte-todo, sino que se seleccionaron cilindros de papel (pajillas de plástico) de diferentes longitudes de manera tal que, al tomar un cilindro que requiriera dos iteraciones para igualar la longitud de un *Tije*, se introdujera la fracción unitaria $\frac{1}{2}$, llamada en este contexto oticaïmo o *pequeño de a dos* (Figura 1). En esa misma lógica, el pequeño de a tres requeriría iterarse tres veces para

igualar la longitud del *Tije*, siendo un tercio de este ($\frac{1}{3}$), y así sucesivamente podrían elaborarse un sin fin de pequeños.

Figura 1

Subunidad. En azul el “Oticaimo” o “pequeño de dos”. En blanco el *Tije*



Otro elemento clave en el diseño de esta práctica son las conversaciones colectivas, en ellas los alumnos intercambian ideas y reconocen la *relación recíproca del tamaño* relativo de los pequeños elaborados, proceso que les permite dimensionar su longitud en función del número de iteraciones necesarias para igualar la unidad (*Tije*). Thompson y Saldanha (2003) definen esta relación de la siguiente manera:

La cantidad A es $\frac{1}{n}$ del tamaño de la cantidad B significa que la cantidad B es n veces mayor que la cantidad A . La cantidad A es n veces mayor que la cantidad B significa que la cantidad B es $\frac{1}{n}$ mayor que la cantidad A . Otra forma de decir “relación recíproca de tamaño relativo” es afirmar que las dos cantidades en comparación se miden cada una en unidades de la otra... lo que no implica que A y B tengan algo en común. (p. 31)

Discusión y resultados: La reinención de las fracciones unitarias

Los Experimentos de Diseño, como el que aquí se presenta, se caracterizan por estar sometidos a dos tipos de análisis, un iterativo y otro retrospectivo; en el caso del presente trabajo, para la presentación de los resultados nos basamos en el segundo. En el análisis retrospectivo se revisa la experiencia completa para determinar la viabilidad de las conjeturas, recordando que los recursos teóricos son utilizados tanto para el diseño como para interpretar los datos recuperados (videograbaciones, entrevistas y productos elaborados por los alumnos).

En el contexto de la segunda práctica, el *valor recíproco del tamaño relativo* de la fracción adquiere un nuevo significado al profundizar la comprensión de la fracción unitaria, ya que pueden visualizar la superficie que cubrirá una subunidad en relación con el *Tije*. A continuación, presentamos un fragmento de diálogo, donde M es maestra, Aa alumna, Ao alumno y Aos alumnos; aquí se ejemplifica cómo se reconoce el tamaño relativo de la fracción unitaria respecto de la unidad de referencia.

M: *Muy bien Sofía, ¿cómo sería el pequeño de a tres?*

Aos: *más pequeño*

M: *Vamos a escuchar a Noemí*

Noemí: *Tiene que ser más chiquito para que quepan tres popotitos aquí* (se refiere a la vara)

M: *Tiene que caber...*

Aa: *Tres veces*

M: *Tiene que caber tres veces ¿va a ser más largo o más chico que el pequeño de a dos?*

Aos: *Más chico*

M: *¿por qué, si tres es más grande que dos?*

(todos hablan al mismo tiempo)

M: *Fabiola tiene una respuesta, vamos a escuchar*

Fabiola: *Tiene que ser más pequeño porque si no, no puede caber* (tomando la vara)

M: *¿Si es más grande que el pequeño de a dos no va a caber aquí?*

Ao: *No, tiene que ser más pequeño*

En el fragmento anterior podemos observar que los alumnos van desarrollando nociones que les permiten reconocer la relación entre el tamaño del *Tije* y el pequeño. A través de sus argumentos, denotan que las dos cantidades comparadas (pequeños de dos y de tres) no reflejan el tamaño de su longitud por el número natural utilizado, sino que es al contrario por la iteración; estas ideas desarrolladas en los esquemas fraccionarios de Thompson y Saldanha (2003), y retomadas por Cortina et al. (2014), nos dan una alternativa para la introducción de las fracciones unitarias para que dos magnitudes sean interpretadas en su *relación recíproca de tamaño relativo*.

La agenda avanza cuando, con la intención de abstraer, caracterizar y simbolizar las fracciones unitarias, aunque lo hagan a través de nombres no convencionales, los alumnos comienzan a construir nuevas subunidades, como el pequeño de a cuatro que debe iterarse cuatro veces para igualar a la unidad. La creación de estos “pequeños” (de dos, tres, cuatro, cinco, seis...) conduce a los alumnos a generar nuevos objetos mentales respecto a la fracción unitaria, los cuales les permiten apropiarse de ideas clave para reconocer la fracción como un número que cuantifica.

A partir de esta comprensión se puede expresar que cuanto mayor es el número de iteraciones necesarias para igualar la unidad, la subunidad es más pequeña. Reconocen que el pequeño de seis es menor que el de cuatro porque debe iterarse más veces para alcanzar el tamaño del *Tije*. Así comienzan a atribuir un valor cuantitativo a las fracciones unitarias.

Durante esta segunda práctica se observa que los estudiantes construyen objetos mentales que les permiten interpretar el tamaño de las fracciones unitarias. Steffe (2010) señala que el esquema fraccionario de un alumno evoluciona cuando sus argumentos se basan en la iteración y no en la idea de “parte de un todo”. Este cambio se fortalece cuando los estudiantes expresan sus ideas y comparten los objetos mentales que han construido a través de las conversaciones colectivas, lo que da lugar a una matematización vertical (según el principio de niveles), ya que comienzan a organizar sus

ideas dentro de la realidad en la que están inmersos, esquematizando sus respuestas y generando nuevas ideas matemáticas.

M: *Ahora va un reto difícil. Primero quiero que lo imaginemos, uno que no hemos hecho. Vamos a imaginar el pequeño de a veinte, pero solo vamos a imaginarlo.*

M: *¿Quién dibujó algo muy grande? (los niños niegan con la cabeza). Si no dibujaron algo muy grande la tienen mal, porque veinte es un numerote.*

(Se oye un comentario: “No, no, es chiquito”).

M: *¿Lucas dibujaste algo grande o pequeño?*

Lucas: *Pequeño.*

M: *¿Por qué pequeño? Hazlo con tus dedos.* (Lucas y otros niños hacen una marca con los dedos). *¿Qué escribiste?*

Lucas: *Para que quepa bien en la vara.*

Leticia: *Entre más grande el número, menos grande el popote.*

Sofía: *Sería de este tamaño, porque si fuera más grande sería 19, 18, 17, etc.*

Ana Paula: *Yo creo que sería de este tamaño, porque si lo hago muy grande no me cabría 20 veces, pero de este tamaño sí cabe las 20.*

Luis Humberto: *Entre más grande el número, más chico tiene que ser el popote.*

Fabiola: *Si estuviera más grande no podría ser pequeño de a 20, y así sí, porque está chiquito.*

La consigna del profesor —*imaginemos un pequeño de 20*— busca que los estudiantes reflexionen y articulen un discurso en el que reconozcan la *relación recíproca del tamaño* relativo desde la noción de iteración. Las respuestas muestran que han construido objetos mentales en torno a la fracción unitaria. Ana Paula dice: “si lo hago más grande no me cabría 20 veces”, lo que indica que imaginó una subunidad cuyo tamaño está subordinado a su capacidad de ser iterada exactamente 20 veces.

Gracias a esta actividad de matematización referencial, los estudiantes logran construir objetos mentales que les permiten comparar fracciones unitarias y determinar cuál es mayor en función de su tamaño relativo. Reconocen que estas fracciones (o pequeños) son independientes de la unidad de referencia, y que su tamaño está determinado por la relación recíproca expresada por Thompson y Saldanha (2003): Si A es seis veces B , entonces B es $\frac{1}{6}$ de A . Esta comprensión sienta las bases para que en el futuro puedan concebir la fracción en términos multiplicativos y reconozcan que puede ser iterada para obtener una medida menor, igual o mayor que la unidad de referencia.

En esta práctica, los estudiantes observaron que los pequeños vistos desde una matematización horizontal, y fracciones desde una vertical, no están contenidos en la unidad, sino que funcionan como herramientas de medida independientes y pueden ser iterados sin restricciones (Delgado & Aguayo, 2024).

Para Freudenthal (1991) hay una diferencia fundamental entre la matematización horizontal y vertical, mientras que la primera se refiere al tránsito del “mundo de la vida” al “mundo de los símbolos” cuando los alumnos transforman la situación en diagramas y dibujos, la matematización vertical se mueve siempre dentro de los símbolos matemáticos porque se desprende de las características del contexto y comienza a funcionar como un modelo para la lógica, como un modelo matemático, con lo que aparecen elementos propios de un concepto.

En esta práctica, entonces, resulta fundamental que la unidad de medida se conciba separada del objeto que se mide para que mantenga una relación multiplicativa y no aditiva, del tipo $f(x, y) = f(x \cdot 1, y \cdot 1)$. Steffe (2010), Tzur (1996) y Thompson y Saldanha (2003) coinciden en señalar que la iteración permite reconstruir un esquema fraccionario multiplicativo que posibilita la producción de fracciones propias e impropias, ya que, como afirma Tzur (2012), “el esquema de fracciones iterativas implica una forma rudimentaria de pensamiento multiplicativo sobre fracciones, incluida la generación y operación de fracciones impropias” (p. 393). La importancia de que los estudiantes construyan los pequeños como subunidades independientes se debe a que la iteración no se limita a igualar la unidad de referencia, pues puede superarla en longitud.

Simbolización y comparación de fracciones unitarias a través de los pequeños
Gravemeijer et al. (2003) destacan que es esencial que los estudiantes se familiaricen con nuevas herramientas matemáticas y se introduzcan en el mundo de los símbolos. En esta segunda práctica del experimento, el objetivo no sólo era que reconocieran fracciones unitarias como parte del proceso de matematización, sino que también incorporaran una representación simbólica que les acercara a las ideas del “mundo acayá”.

Por la razón anterior, para favorecer un razonamiento más abstracto que posteriormente se consolidará con las representaciones convencionales, en la siguiente actividad de la agenda se propuso una transición hacia una nueva representación escrita de los pequeños, específicamente una escritura no convencional del denominador (Figura 2) que permite identificarlo como número independiente —no necesariamente relacionado con partes de un todo—, y avanzar hacia una concepción más compleja de él. Esta estrategia busca diferenciar el símbolo como objeto matemático de las propiedades habituales de los números naturales y favorecer la construcción de un nuevo significado del denominador.

La notación empleada por el número en el recuadro permite a los alumnos identificar con mayor facilidad el pequeño que se utiliza, pero no es sólo una simple asociación simbólica, pues implica el reconocimiento del tamaño

relativo de cada uno de los pequeños. A partir de él, los estudiantes comienzan a advertir que dicho tamaño no depende directamente del número en sí, sino de la relación recíproca de tamaño entre el pequeño y la unidad de referencia.

Figura 2

Notación no convencional con la que se representa el pequeño de a dos

2

En este proceso se pretende ir más allá de la idea de que $\frac{1}{n}$ representa simplemente “una parte de un todo dividido en n partes iguales”, en coherencia con Steffe (como se citó en Cortina, 2008). Se busca que los estudiantes comprendan a $\frac{1}{n}$ como cantidad que, al repetirse n veces, reproduce la unidad completa, lo que implica concebir la fracción unitaria como su inverso multiplicativo.

Como se puede apreciar en el siguiente fragmento (Figura 3), el profesor plantea tareas de comparación de fracciones unitarias y pide a los alumnos que justifiquen por qué una es mayor que la otra. Es posible observar que en sus justificaciones, el argumento se hace más convincente cuando pasan de un discurso de cálculo a un discurso conceptual (Cobb, 2003).

Figura 3

Tareas de comparación

Comparación 1:	<table><tr><td>7</td></tr></table>	7	<table><tr><td>5</td></tr></table>	5
7				
5				
Comparación 2:	<table><tr><td>77</td></tr></table>	77	<table><tr><td>76</td></tr></table>	76
77				
76				

Horacio: *Entre más grande sea el número, más pequeño se hace para caber las veces que te diga*

M: *No me queda muy claro. ¿Vamos a escuchar a Jaime?*

Jaime: *El 77 es más pequeño, cabe más veces en el Tije y el 76 es más grande, y entre mayor es el número, menor es el tamaño, el 76 es menor número, mayor tamaño.*

A través de esta práctica, se observa que los alumnos construyeron objetos mentales que dan sentido a la fracción unitaria, lo que fue posible porque ellos mismos generaron los significados mediante un proceso de matematización progresiva. En sus discursos reconocen la *relación recíproca de tamaño relativo* entre la subunidad y el *Tije*, además de que comienzan a identificar propiedades del denominador que les permiten superar los obstáculos conceptuales derivados del pensamiento ligado a los números naturales. Esto nos lleva a reconocer que la implementación de la segunda práctica los acerca cada vez más a la comprensión de la fracción como un objeto cuantificador.

Conclusión

Los resultados del experimento de enseñanza permiten afirmar que la introducción de la fracción unitaria como medida representa una alternativa didáctica sólida frente a los enfoques tradicionales centrados en el modelo parte-todo. Los hallazgos muestran que a través de la iteración de subunidades independientes de la unidad para igualar a la de referencia, los estudiantes logran establecer una *relación recíproca de tamaño relativo* que les permite comprender de forma más profunda el número fraccionario.

Este tipo de prácticas propician la constitución de objetos mentales sobre las fracciones, basados en el razonamiento multiplicativo y en la concepción de la fracción unitaria como objeto cuantificable. Tal construcción abre paso a interpretaciones más complejas para concebir al número fraccionario como una herramienta que permite expresar relaciones entre magnitudes, tal como lo señalan Thompson y Saldanha (2003) y Cortina (2014).

También destaca la importancia de la simbolización y el uso de notaciones no convencionales como recursos que facilitan el tránsito entre la experiencia concreta y el pensamiento abstracto. Este último es posible gracias a la elaboración y uso de subunidades construidas independientes de la unidad de referencia, lo que favorece una comprensión relacional del denominador alejada de sus significados tradicionales.

Finalmente, los hallazgos presentados ofrecen aportes tanto para la práctica docente como para el diseño curricular y la formación de profesores, mismos que permiten promover una enseñanza que considere la fracción como medida sustentada en la iteración y el pensamiento multiplicativo. Esto ha de permitir sentar las bases para el desarrollo de un pensamiento matemático que permita a los alumnos enfrentar, con mayor facilidad, tareas matemáticas más complejas en niveles escolares posteriores.

Referencias

- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2005). Los principios de la educación matemática realista. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, 5, 69–96.
- Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *American Educational Research Association*, 32(1), 9–13. <http://www.jstor.org/stable/3699928>
- Cobb, P., Visnovska, J., & Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique*, 55–73.
- Cortina, J., Zuñiga, C., & Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7–29.

- Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática, (especial)* 270–284.
- Delgado, I., & Cortina, J. L. (2021). La educación matemática realista. Naturaleza y posibles aportes en México. En L. M. Aguayo, & J. Calderón (Eds.), *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas Educativas*. (pp. 325–342). Taberna Libreria Editores.
- Delgado, I., & Aguayo, L. (2024). La constitución de objetos mentales sobre la fracción impropia. Un experimento de diseño desde la Educación Matemática Realista. *Educación Matemática, 36*(3), 37–64. <https://doi.org/ptk2>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Springer. <https://doi.org/fvhh2c>
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Routledge.
- Hannula, M.S. (2003), Locating Fraction on a Number Line. En N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.17–24). PME.
- Kieren, T. (1981). The rational number construct—Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). Ohio State University.
- Luna, C., & Aguayo, L.M. (2021). El experimento de diseño. Una alternativa metodológica para la investigación y la innovación. En L. M. Aguayo, & J. Calderón (Eds.), *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas educativas*. (pp. 325–342). Taberna Libreria Editores.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2001). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–78.
- Steffe, L.P. (2010). A New Hypothesis Concerning Children's Fractional Knowledge. En L. P. Steffe, & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 1–12). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0591-8_1
- Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Routledge.
- Thompson, P., & Saldanha L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95–113). National Council of Teachers of Mathematics.

- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/bp5wnp>
- Tzur, R. (2012). An Integrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting That Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4) 390–416. <https://doi.org/ctw29d>
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310–316
- Zapata-Cardona, L. (2020). El rol de las tareas realistas en la interpretación del residuo de la división aritmética. *Uni-pluriversidad*, 20(2), 1–17. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.20.2.04>
- Zolkower, B., Bressan, A., Pérez, S., & Gallego, M. F. (2020). From the Bottom Up - Reinventing Realistic Mathematics Education in Southern Argentina. En Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics*. Springer. <https://doi.org/ptk4>
- Zuñiga, C. & Cortina, J. (2011, 7 al 11 de noviembre). *Conocimientos previos para desarrollar nociones de fracción como cantidad de tamaño relativo* [Resumen de la presentación de ponencia]. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa, Monterrey, Nuevo León, México.

 Autor de correspondencia

Ivette Anel Delgado Valdez | 1975403012@alumnos.upn.mx

