



Del libro de texto al aprendizaje: análisis APOE de la comprensión de la dependencia lineal

From Textbook to Learning: An APOS Analysis of the Understanding of Linear Dependence

Irenisolina Antelo Lopez  | irenisolina.antelo@unison.mx
Universidad de Sonora

César F. Romero Félix  | cesar.romero@unison.mx
Universidad de Sonora

Recepción: 7 de junio de 2025 | Aceptación: 29 de enero de 2026

Resumen

En este estudio se analiza la comprensión de la dependencia lineal y sus relaciones con la combinación e independencia lineal en dos contextos: una propuesta de enseñanza fundamentada en APOE, implementada con 32 estudiantes de ingeniería, y el tratamiento del concepto en un libro de texto universitario. Se emplea la teoría APOE como marco teórico-metodológico. Los resultados muestran que el libro de texto introduce estas relaciones de manera declarativa y acumulativa, presuponiendo su disponibilidad para el estudiante, mientras que en la implementación se observa que su construcción no es trivial y requiere exploración en distintas dimensiones, así como la consideración de conceptos de naturaleza geométrica y algebraica, y un trabajo progresivo con combinaciones lineales. El análisis comparativo pone en evidencia una desalineación entre las hipótesis cognitivas implícitas del texto y los procesos efectivos de construcción conceptual que se desarrollan en entornos de enseñanza que favorecen procesos constructivos de aprendizaje. Se discuten implicaciones para el diseño curricular y la enseñanza de conceptos centrales del Álgebra Lineal, particularmente en relación con el tiempo y la diversidad de trayectorias de aprendizaje.

Palabras clave

dependencia lineal, libros de texto, teoría APOE, Experimentos de Enseñanza

Abstract

In this study, we analyze the understanding of linear dependence and its relationships with linear combinations and linear independence in two contexts: an APOS-based instructional proposal implemented with 32 engineering students, and the treatment of the concept in a university-level textbook. APOS theory is used as the theoretical–methodological framework. The results show that the textbook introduces these relationships in a declarative and cumulative manner, presupposing their availability to students, whereas the instructional implementation reveals that their construction is not trivial and requires exploration across multiple dimensions, consideration of concepts of both geometric and algebraic nature, and progressive work with linear combinations. The comparative analysis highlights a misalignment between the implicit cognitive assumptions of the textbook and the actual processes of conceptual construction that emerge in teaching environments that promote constructive learning processes. Implications for curriculum design and for the teaching of central concepts in Linear Algebra are discussed, particularly with respect to time and the diversity of learning trajectories.

Keywords

Linear dependence; textbooks; APOS theory; teaching experiments

Introducción

Este artículo se enmarca en el eje *Retos y Perspectivas en la Enseñanza de las Matemáticas*, al abordar las tensiones entre la estructura lineal y formal del discurso en los libros de texto universitarios y la construcción no lineal del aprendizaje por parte de los estudiantes en entornos de enseñanza fundamentados en marcos teóricos constructivistas. Lo anterior es especialmente relevante si se considera que en las últimas décadas la necesidad de reflexionar, cuestionar y cambiar los enfoques de enseñanza dominantes en Álgebra Lineal ha sido argumentada en la literatura especializada tanto por la creciente importancia de la disciplina en la resolución de problemas complejos en las áreas STEM (Stewart et al., 2022) como por las dificultades persistentes que enfrentan los estudiantes bajo un enfoque tradicionalmente transmisivo, relacionado con un estilo pedagógico predominantemente algorítmico o centrado en el formalismo matemático (Dorier, 2000). Identificar las tensiones entre contextos, promueve una reflexión crítica sobre los supuestos a partir de los cuales se organiza el conocimiento matemático en los recursos institucionales y permite generar propuestas didácticas más sensibles a los procesos constructivos del estudiante. Lo anterior se hace notable en el aprendizaje de conceptos como la dependencia lineal, cuya comprensión no solo implica el dominio de definiciones formales, sino la construcción progresiva de relaciones con nociones como la combinación y la independencia lineal. La

forma en que estas relaciones se presentan y organizan varía significativamente entre contextos de enseñanza, generando distintos caminos posibles para el desarrollo del conocimiento matemático.

En este trabajo se analiza comparativamente la construcción del aprendizaje del concepto de dependencia lineal que se promueve en un libro de texto clásico de Álgebra Lineal (Poole, 2011) y en una propuesta de enseñanza basada fundamentada por una teoría constructivista y cognitiva, con el fin de identificar cómo cada contexto organiza y restringe las relaciones entre conceptos y qué efectos tiene ello en la construcción progresiva del conocimiento sobre la dependencia lineal. De esta manera, se responde a la pregunta:

¿En qué difiere la construcción progresiva del aprendizaje sobre la dependencia lineal entre un libro de texto clásico (Poole, 2011) y una propuesta de enseñanza fundamentada en una teoría constructivista del aprendizaje, en cuanto a los supuestos sobre cómo comprenden los estudiantes las relaciones con la combinación e independencia lineal?

Antecedentes

Diversos estudios muestran que el aprendizaje de conceptos abstractos se ve favorecido cuando los estudiantes participan activamente en tareas que demandan exploración, argumentación y establecimiento de relaciones, como la resolución de problemas de modelación o el trabajo con secuencias de tareas cognitivamente desafiantes (Trigueros, 2018; Wawro et al., 2022). En contraste, se supone que el uso directo y acrítico de libros de texto tradicionales puede obstaculizar estos objetivos, al presentar el contenido bajo una estructura lineal y acumulativa que no siempre se corresponde con los procesos reales de aprendizaje de los estudiantes.

Elementos matemáticos

Para realizar el análisis señalado, se seleccionó uno de los conceptos fundamentales en Álgebra Lineal, la dependencia lineal debido a que además de permitir abordar problemas complejos en disciplinas como la Ciencia de Datos, el concepto permite identificar relaciones internas entre vectores, detectar redundancia en conjuntos de datos y analizar la estructura de los espacios vectoriales. Este concepto se vincula con la comprensión de otros conceptos. Por ejemplo, en un curso introductorio de Álgebra Lineal, los estudiantes deben comprender su relación con la combinación e independencia lineal y con sistemas de ecuaciones (Trigueros, 2018).

En este contexto, la combinación lineal es un referente central para entender cómo un conjunto de vectores genera un espacio (Turgut et al.,

2022) y cómo un vector puede expresarse en términos de otros, lo que resulta necesario para identificar relaciones lineales. La independencia lineal, por su parte, permite determinar cuándo un conjunto de vectores aporta información nueva o redundante, lo que adquiere relevancia en aplicaciones como el análisis de datos y la optimización de modelos (Stewart et al., 2022).

Elementos curriculares

Es notable que, en la práctica del aula, la comprensión de las relaciones conceptuales no siempre se logra con la profundidad esperada por los profesores o instituciones. Esto sucede aun cuando los libros de texto, como el de Poole (2011), establecen formalmente conexiones entre la dependencia lineal y otros conceptos, afirman estar alineados con las recomendaciones de recomendaciones internacionales para la enseñanza de Álgebra Lineal incluso parecen cumplir con las recomendaciones actualizadas de The LACGS 2.0 (Stewart et al., 2022). Es posible, que la causa sea que la construcción de la comprensión requiere tiempo, exploración guiada y oportunidades para la indagación y la reflexión (Arnon et al., 2014; Stewart et al., 2022), condiciones que no siempre están presentes en el desarrollo cotidiano de las clases. La discrepancia entre lo que se muestra en el texto y lo que construyen los estudiantes requiere ser analizada desde una perspectiva cognitiva, ya que involucra no sólo el contenido matemático en sí, sino también los procesos mediante los cuales los individuos construyen su comprensión de los conceptos matemáticos y sus relaciones en entornos de enseñanza fundamentados en teorías constructivistas del aprendizaje.

Por ejemplo, algunas investigaciones centran la atención en las conexiones de implicación lógica de los conceptos de los sistemas lineales con la combinación, dependencia e independencia lineal. Harel (2017), reporta que algunos estudiantes interpretan erróneamente que una combinación lineal de vectores implica un único conjunto de escalares, cuando en realidad puede haber múltiples. Esta comprensión limitada compromete su capacidad para abordar propiedades como la expresión única de un vector en términos de vectores linealmente independientes.

Identificación de intenciones y potencialidades de desarrollo cognitivo a partir de libros de texto

Aunque en los últimos años ha habido un incremento en los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal, la investigación específica que analiza cómo los libros de texto influyen en la comprensión y aprendizaje de los estudiantes sigue siendo limitada. Las investigaciones, en

este contexto, han sido analizadas como objetos culturales, aceptados por una comunidad especializada, que promueven determinadas estructuras mentales en los estudiantes, aunque muchas veces de manera implícita.

Betancur-Sánchez, Roa- Fuentes y Ballesteros (2021) propusieron una forma viable de desarrollar las construcciones mentales asociadas a los conceptos de eigenvalores y eigenvectores, basada en el análisis de tres libros de texto, mediante una descomposición genética preliminar (DGp) en términos de la teoría APOE. Entre las contribuciones destacadas se encuentran el fortalecimiento de la comprensión conceptual del equipo investigador, la articulación con otras investigaciones y la identificación de enfoques pedagógicos y omisiones relevantes para la enseñanza.

De forma similar, Borji y Martínez-Planell (2023) propusieron una descomposición genética implícita del concepto de sólido de revolución, basada en la sección de un libro de cálculo multivariable. A diferencia de una DG elaborada por investigadores a partir de experiencias de enseñanza, se infirió y explicitó las construcciones mentales que el texto parece sugerir. El análisis se derivó de leer, resolver y reflexionar sobre los ejemplos y ejercicios propuestos. En el estudio, se concluye que el texto asume que los estudiantes ya han construido una comprensión de las sumas de Riemann en el contexto unidimensional y que reconocen su relación con las integrales definidas, sin ofrecer apoyos explícitos para dicha construcción. Los autores infieren una descomposición genética implícita en el texto, que si bien orienta ciertas construcciones mentales, no las explicita ni las desarrolla progresivamente, lo cual puede dificultar que los estudiantes construyan estructuras mentales más avanzadas de este concepto.

Referentes teóricos

La teoría APOE es una teoría cognitiva que enfatiza la construcción individual del conocimiento matemático mediante el análisis de estructuras mentales. Para ello adopta la noción de estudiante genérico, entendida como una representación abstracta que refleja construcciones mentales comunes observadas en distintos estudiantes dentro de una misma institución o contexto educativo mediante una Descomposición Genética (Trigueros, 2022).

Las estructuras mentales se caracterizan como formas particulares y etapas en la construcción del conocimiento matemático de un individuo, es decir, distintas formas de entender y organizar internamente un concepto. Estas estructuras permiten modelar cómo una persona avanza en su comprensión partiendo desde la ejecución de tareas de forma mecánica hasta la resolución de problemas complejos que requieren articular distintos conceptos. El desarrollo de las estructuras no ocurre de manera espontánea,

sino que es el producto de diferentes procesos reflexivos del individuo que se articulan mediante los mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

Las estructuras mentales específicas y que le dan nombre a la teoría son: Acción (una transformación externa), Proceso (transformación interna y significativa), Objeto (base para la transformación y el desarrollo de nuevas construcciones) y Esquemas. Cada una de estas estructuras surge de mecanismos mentales específicos, que permiten la construcción y reorganización del conocimiento matemático.

Las relaciones dentro de un Esquema, que permiten y guían su desarrollo, pueden clasificarse como de correspondencia, transformación y conservación. Estas relaciones describen la evolución de la comprensión de relaciones matemáticas desde una capacidad inicial basada en asociaciones hasta una estructura integrada y flexible que permite el uso de conceptos de manera fluida en diversos contextos (Martínez-Planell et al., 2024; Trigueros, 2018; Trigueros et al., 2024).

Una relación de correspondencia (C) se establece cuando el individuo emplea comparaciones entre estructuras, identificando similitudes y diferencias, y se evidencia cuando un individuo reconoce la asociación entre dos o más estructuras sin necesariamente justificarla o comprenderla en profundidad. Este tipo de relación suele manifestarse en las primeras etapas de comprensión matemática (Martínez-Planell et al., 2024), se distinguen particularmente las siguientes. Una *relación de transformación* (T) se desarrolla cuando un individuo reconoce que modificaciones en un componente del Esquema inducen cambios en otros y es capaz de identificar estructuras interrelacionadas. Esto se observa cuando un estudiante justifica la conexión entre distintos conceptos dentro del Esquema, estableciendo argumentos que explican sus interacciones y consecuencias (Martínez-Planell et al., 2024). Una *relación de conservación* (E) se manifiesta cuando un individuo utiliza estructuras de manera consistente en distintas situaciones problemáticas, aplicando principios de forma intercambiable y mostrando conciencia de las limitaciones o condiciones de validez de un concepto (Martínez-Planell et al., 2024).

Se distinguen tres etapas en el desarrollo de los esquemas: intra (predominan relaciones de correspondencia y Acciones y Procesos aislados), inter (relaciones de transformación y Procesos que se vinculan con otros conceptos) y trans (relaciones de conservación y Objetos de los conceptos).

Metodología

La investigación se desarrolló mediante una adaptación del ciclo de APOE (Arnon et al., 2014), planteando tres etapas: (1) Análisis teórico (2) diseño e implementación del experimento de enseñanza exploratorio y (3)

análisis comparativo de la comprensión de conexiones conceptuales que el libro asume y del desarrollo de los estudiantes bajo una enseñanza basada en APOE.

La implementación de la enseñanza fue realizada por uno de los autores en un curso introductorio de Álgebra Lineal, con 32 estudiantes de primer año de ingeniería civil, durante dos semanas (diez horas), distribuidos en 8 equipos. La intervención se diseñó en concordancia con el ciclo de investigación de APOE, en el que se propone que se promuevan las estructuras mentales descritas en una descomposición genética, alineado con investigaciones recientes (Arnon et al., 2014; Trigueros, 2018; Turgut et al., 2022; Wawro et al., 2022) y recomendaciones curriculares (Stewart et al., 2022), en el sentido de que se promueve la construcción, discusión y validación de hipótesis en entornos colaborativos mediados por GeoGebra.

La participación de los estudiantes fue voluntaria y se contó con su consentimiento informado para el uso de sus producciones con fines de investigación. Se garantizó la confidencialidad y la anonimización de los datos mediante el uso de seudónimos para identificar a los equipos y participantes, evitando cualquier referencia que permitiera su identificación personal o institucional.

Dado que, al igual que Borji y Martínez-Planell (2023), se presupone que el libro demanda ciertas concepciones para su comprensión, aunque no se expliciten ni se desarrollen progresivamente, la comparación se realiza con producciones estudiantiles que permiten hacer explícitas dichas estructuras. Por ello, se seleccionaron las producciones de dos equipos, Equipo 1 y Equipo 2, que mostraron mayor comprensión conceptual, ya que estas aproximan el tipo de sujeto genérico implícitamente asumido por el texto y permiten contrastar qué relaciones conceptuales son construidas y cómo se construyen bajo una enseñanza basada en APOE.

Análisis teórico

El análisis teórico del Esquema de Dependencia Lineal se desarrolló mediante un análisis documental: basado en el análisis de libros de texto (Lay et al., 2022; Poole, 2011), investigaciones previas sobre Esquemas (Trigueros, 2018) e investigaciones de naturaleza histórica sobre el concepto (Dorier, 2000) y descomposiciones genéticas APO previas relacionadas con el concepto.

En su versión sintética la Descomposición genética (DG) establece que El nivel intra-Esquema se manifiesta cuando un sujeto reconoce que cierto tipo de problemas, que pueden demandar concepciones previas sobre conceptos de distinta naturaleza como: la regla del paralelogramo,

combinaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, pueden involucrar simultáneamente a la dependencia lineal sobre conjuntos como $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$.

Mientras que en la etapa inter, las estructuras mentales de dependencia lineal permiten describir propiedades de conjuntos de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^n$ linealmente dependientes como Objetos. Se construyen las concepciones de dependencia lineal sobre otros conjuntos. Se construyen estructuras mentales que permiten la manipulación de los conjuntos para la construcción y deconstrucción de nuevos conjuntos LD o LI. Se comienzan a construir Procesos y Objetos que permiten relacionar la dependencia lineal con conceptos, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, transformaciones lineales, principalmente mediante relaciones de transformación y correspondencia.

Finalmente, la etapa trans, se caracteriza por el desarrollo de los Procesos y Objetos que permiten concebir las propiedades de los conjuntos linealmente dependientes, independientemente de los elementos y características del conjunto sobre el que se opera. Esta etapa involucra el desarrollo principalmente de relaciones de conservación y se evidencia por la estabilidad y coherencia en la resolución de los problemas en los que se involucra la dependencia lineal, lo cual demanda, por ejemplo, la abstracción de las propiedades del espacio vectorial V sobre el campo F .

Análisis del libro de texto

La búsqueda de información en el libro de Poole (2011) se realizó en Atlas.ti mediante una consulta sistemática de las frases *dependencia lineal*, *linealmente dependiente* y *linealmente dependientes*. Este procedimiento arrojó un total de 99 resultados distribuidos en el libro. En la sección introductoria de dependencia lineal (en el capítulo 2, pp. 99–104, se generaron 13 citas que involucraban a la dependencia lineal con combinación e independencia lineal. Estas citas fueron posteriormente discutidas y analizadas con el propósito de identificar qué tipo de relaciones matemáticas demanda el tratamiento introductorio de la dependencia lineal. De esas citas se identificaron cinco relaciones (no mutuamente excluyentes entre citas) entre componentes del Esquema diferentes, entre las cuales cinco citas fueron codificadas con la relación C3-CL-DL y cinco para T4-CL-DL (disponible en bit.ly/LibroEsquema)

Por ejemplo, la cita “El vector w depende de u y v en el sentido de que es una combinación lineal de ellos. Se dice que un conjunto de vectores es linealmente dependiente si uno de ellos puede escribirse como una combinación lineal de los otros” (Poole, 2011, p.98) se asoció con la relación de correspondencia C3-CL-DL relacionada con la capacidad de los estudiantes para observar que algunos vectores pueden escribirse en

términos de otros, pero aún no han construido una noción formal de dependencia lineal ni pueden operar sobre estos conceptos.

Por otra parte, la cita “Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_k$ es linealmente dependiente si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$, al menos uno de los cuales no es cero, tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$ ” (Poole, 2011, p.99) se asoció con la relación T4-CL-DL en la cual los estudiantes dejan de percibir la combinación lineal solo como una operación aritmética y comienzan a entenderla como un criterio estructural para determinar dependencia lineal. Esto puede manifestarse a través de explicaciones geométricas, exploración numérica, razonamientos verbales o uso de GeoGebra, sin necesidad de una prueba formal. El estudiante ya no solo reconoce combinaciones, sino que justifica por qué ciertos vectores pueden o no expresarse en términos de otros.

Diseño e Implementación del Experimento de Enseñanza Exploratorio

A partir de la descomposición genética para el Esquema de dependencia lineal, se diseñó una secuencia de 10 actividades orientadas a la exploración, formulación de conjeturas y argumentación, seis relacionadas con los sistemas lineales y cuatro con combinación e independencia lineales. Las actividades se diseñaron con el objetivo de favorecer la construcción de relaciones entre componentes del Esquema, y se puso especial atención al uso de GeoGebra como medio para promover la abstracción reflexiva mediante la generación de conjeturas, así como el uso de contextos no matemáticos por su valor formativo y a la atención a las producciones de notación de los estudiantes. Para propósitos de este estudio, se limitará a las últimas cuatro (disponibles en bit.ly/actividadesDL). En la siguiente tabla se presenta la descripción de las actividades y los supuestos teóricos en los que se fundamenta:

Tabla 1

Descripción de las actividades

Código	Descripción	Supuestos teóricos sobre relaciones promovidas
E4A1	Se plantea un contexto de diseño gráfico en el que un cliente solicita la construcción de una paleta de cinco colores obtenidos exclusivamente a partir de intensidades bajas de rojo y azul. El applet en GeoGebra permite visualizar que cualquier punto del cuadrado unitario, asociado a una tonalidad, puede obtenerse como combinación del rojo y el azul, evidenciando la dependencia lineal del conjunto formado por esos tres colores.	C3-CL-DL: Los estudiantes observan que algunos vectores pueden escribirse en términos de otros, al generar distintas tonalidades como combinaciones del rojo y el azul. Sin embargo, no han construido aún una noción formal de dependencia lineal

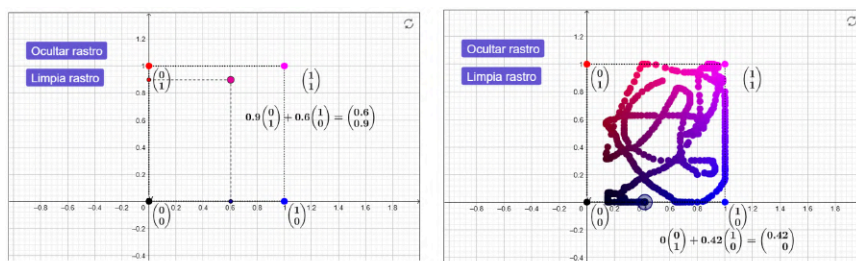
Tabla 1 (continúa)*Descripción de las actividades*

Código	Descripción	Supuestos teóricos sobre relaciones promovidas
E4A2	Se estudia la dependencia e independencia lineal a partir de la noción de combinación lineal de vectores, introducida formalmente mediante su definición algebraica y el criterio de dependencia como la posibilidad de expresar un vector como combinación de los demás. El trabajo se apoya en un applet dinámico en GeoGebra, en el que se representan conjuntos de vectores en el plano. Tal como está diseñado, el applet privilegia un caso particular de dependencia lineal, en el que los vectores se relacionan por proporcionalidad escalar.	C3-CL-DL: Los estudiantes reconocen que ciertos vectores pueden expresarse en términos de otros a partir de la proporcionalidad escalar y la colinealidad. No obstante, no han construido una noción formal de dependencia lineal ni pueden operar sobre el criterio de manera general, limitándose a identificar casos particulares.
E4A3	Se apoya en un applet dinámico en GeoGebra que permite explorar combinaciones lineales entre tres vectores u , v y w , habilitando la selección de cuál de ellos actúa como vector resultante de la combinación de los otros dos. La tarea enfatiza que la dependencia lineal es una propiedad del conjunto y que no basta verificar que un vector particular no pueda escribirse como combinación de los otros para concluir independencia lineal.	T4-CL-DL: Esto se manifiesta mediante explicaciones geométricas, y exploración con GeoGebra, donde ya no solo reconocen combinaciones, sino que justifican por qué ciertos vectores pueden o no expresarse en términos de otros, sin necesidad de una prueba formal.
E4A4	Se diseña como un puente hacia el espacio tridimensional, introduciendo la dependencia e independencia lineal a través de un contexto funcional de mezcla de suplementos nutricionales. La segunda parte abandona el contexto y se centra en la construcción de conjuntos de vectores en el espacio tridimensional. A partir de vectores dados, se solicita formar conjuntos y justificar algebraica y geoméricamente su carácter dependiente o independiente.	T4-CL-DL En esta parte, los estudiantes comienzan a concebir la dependencia y la independencia lineal como propiedades del conjunto, y justifican estructuralmente su relación a través del criterio de combinación lineal.

En la Actividad E4A1, la dependencia lineal se introdujo a partir del contexto del modelo RGB. Para ello, los estudiantes habían trabajado previamente en un entorno bidimensional, donde los colores rojo y azul estaban representados por los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, respectivamente (Figura 3). En este entorno, se visualizaban las posibles combinaciones de estos colores como puntos del plano.

Figura 1

Vista del Gradiente formado por el color rojo y azul en el plano

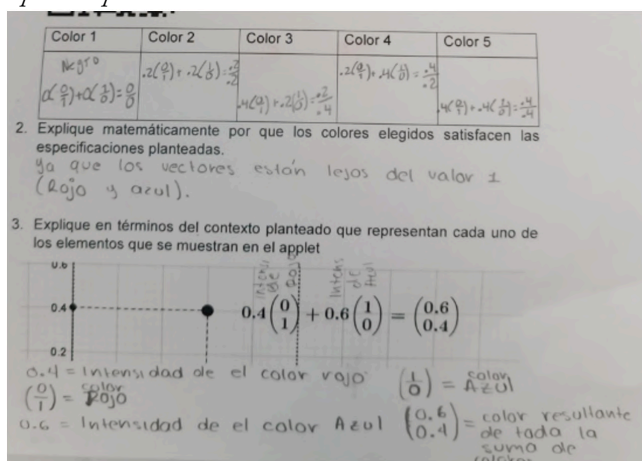


Sobre esta base, se planteó la siguiente situación:

“Un cliente desea que el color resultante en el centro del logo sea $(R, G, B) = (0.8, 0, 0.54)$. Determine: (a) si es posible generar dicho color como combinación de los colores base utilizados; (b) si los colores base son suficientemente variados como para responder a futuras solicitudes del cliente; y (c) un modelo vectorial que relacione las intensidades de rojo, verde y azul con el color resultante, expresado como un vector u .” Este razonamiento se vincula directamente con un método informal de definir la dependencia lineal. Por ejemplo, la producción del Equipo 1 se asoció con la relación C3-CL-DL por la posibilidad de los estudiantes de identificar que un color podía escribir en términos de otros (a partir de su forma vectorial).

Figura 2

Respuesta a primera parte de la Actividad E4-A1



Resultados

Los resultados se centran particularmente en las relaciones C3-CL-DL y T4-CL-DL, ya que ambas constituyen el núcleo del tratamiento

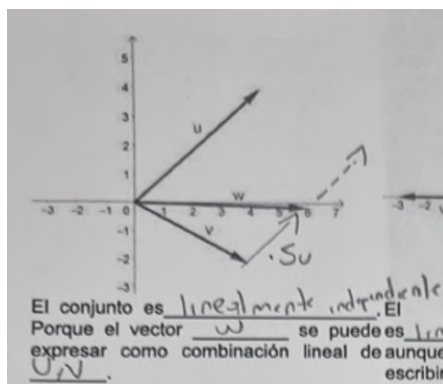
introdutorio de la dependencia lineal en el libro de texto y, al mismo tiempo, el eje de diseño de las actividades de la E4A1 a la E4A4.

El análisis del texto de Poole (2011) muestra que la relación C3 se demanda de manera temprana y reiterada, principalmente a través de definiciones y ejemplos en los que se asume que el estudiante puede reconocer que un vector puede escribirse como combinación de otros. Sin embargo, esta demanda aparece formulada de manera declarativa y algebraica, sin un trabajo explícito que permita al estudiante construir dicha relación en lo gráfico y en diferentes dimensiones.

Por ejemplo, aunque el Equipo 1 no tuvo problema en la resolución de la actividad E4A1, la interpretación de la dependencia lineal en el plano resultó compleja. En particular, al inicio los estudiantes tuvieron dificultades para identificar los componentes gráficos de la descomposición de algún vector en función de los otros, el profesor tuvo que intervenir para discutir la interpretación geométrica de la multiplicación por escalar y la suma vectorial, mediante la regla del paralelogramo. Aunque finalmente, pudieron, por ejemplo, expresar un vector como combinación lineal de los otros, concluyeron que el conjunto era linealmente independiente. Este trabajo se asocia con la relación C3-CL-DL, en la cual los estudiantes pueden identificar un vínculo entre la combinación y la dependencia lineales, pero no siempre se concluye de manera adecuada.

Figura 3

Producción de uno de los integrantes del Equipo 1



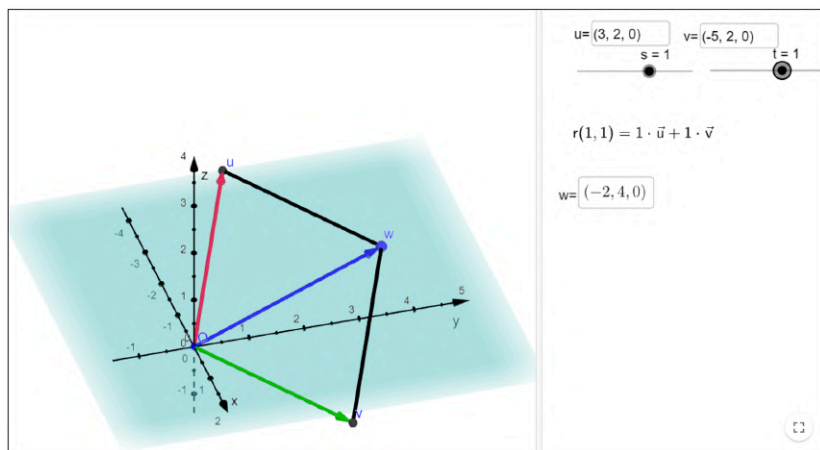
De forma análoga, la relación T4-CL-DL es introducida en el texto como un criterio ya disponible, particularmente mediante la ecuación homogénea y el uso de escalares no triviales, sin que se desarrollen progresivamente las transformaciones entre las estructuras mentales necesarias para pasar de una interpretación aritmética de la combinación

lineal a una comprensión estructural de la dependencia lineal como propiedad del conjunto. En contraste, las actividades diseñadas bajo el enfoque APOE muestran que la construcción de estas relaciones no es trivial: requiere explorar combinaciones lineales en diferentes dimensiones, coordinar representaciones geométricas (como la regla del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$), articular contextos no matemáticos y justificar más allá de la inspección algebraica.

Por ejemplo, si bien ambos equipos lograron comprender la dependencia lineal en $\mathbb{R}^2$, el cambio a $\mathbb{R}^3$ no fue trivial, en particular durante las discusiones con los equipos, ambos mostraron dificultades para extender la noción de dependencia lineal al espacio, aun así, en la cuarta sesión, lograron construir conjuntos LD, tal y como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 4

Captura de pantalla presentada por el Equipo 2 para justificar por que el conjunto $\{u, v, w\}$ que propusieron era LD



Discusiones y conclusión

Los resultados de este estudio permiten matizar la discusión sobre el papel de los libros de texto en la enseñanza del Álgebra Lineal. El análisis no sugiere que el texto de Poole (2011) sea conceptualmente incorrecto o didácticamente cuestionable, sino que su tratamiento de la dependencia lineal responde a una lógica expositiva que presupone ciertas construcciones mentales previas en el estudiante. En particular, las relaciones C3-CL-DL y T4-CL-DL aparecen de manera temprana y coherente desde el punto de vista matemático, articuladas mediante definiciones, ejemplos y criterios formales ampliamente aceptados en la comunidad.

Sin embargo, el análisis comparativo muestra que dichas relaciones, aun cuando están correctamente formuladas en el texto, no necesariamente están disponibles para los estudiantes al momento en que se les demanda. Las producciones estudiantiles evidencian que reconocer que un vector puede escribirse como combinación de otros (C3) y concebir la combinación lineal como un criterio estructural para determinar dependencia (T4) requiere un trabajo cognitivo que no es inmediato. Este trabajo incluye interpretaciones geométricas y algebraicas, la exploración en distintas dimensiones, mediante la reconstrucción progresiva de las concepciones iniciales, aspectos que el libro no desarrolla explícitamente porque no forman parte de su propósito principal. Esta presuposición coincide con lo reportado por Borji y Martínez-Planell (2023), quienes muestran que los textos orientan sobre la construcción de ciertas construcciones mentales, pero no las desarrollan progresivamente ni ofrecen apoyos explícitos para su emergencia.

Desde esta perspectiva, el desfase observado no debe interpretarse como una deficiencia del texto, sino como una diferencia entre la lógica matemática en la presentación del contenido y los procesos cognitivos mediante los cuales los estudiantes construyen su comprensión. Mientras el libro organiza el concepto de dependencia lineal de forma lineal y acumulativa, los Esquemas suelen ser más diversos y sensibles al contexto de exploración, particularmente cuando se transita del plano al espacio tridimensional o cuando se requiere justificar más allá de la inspección algebraica.

Estos hallazgos son consistentes con investigaciones previas que señalan que la comprensión de conceptos abstractos en Álgebra Lineal se beneficia de entornos de enseñanza que hagan explícitas las relaciones entre los conceptos y otorguen tiempo para su construcción (Trigueros, 2018; Wawro et al., 2022). En este sentido, el valor del libro de texto no se cuestiona, sino que se comprende como un recurso que requiere mediación didáctica para que las relaciones que presenta puedan ser efectivamente construidas por los estudiantes.

En conclusión, este estudio sugiere que la enseñanza de la dependencia lineal se fortalece cuando el uso de libros de texto se articula con propuestas didácticas que reconozcan explícitamente la complejidad cognitiva de las relaciones que estructuran el concepto.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/nxn2>

- Betancúr Sánchez, A., Roa Fuentes, S., & Ballesteros, S. J. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: El análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245–276. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2431>
- Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2023). On students' understanding of volumes of solids of revolution: An APOS analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101027. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101027>
- Dorier, J.-L. (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer.
- Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007>
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. (2022). *Linear algebra and its applications* (Sixth edition. Global edition). Pearson Education Limited.
- Martínez-Planell, R., Trigueros, M., & Borji, V. (2024). The role of topology in the construction of students' optimization schema for two-variable functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101106. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101106>
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal*. Cengage Learning.
- Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., McDonald, J., Strong, D., & Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(05), 1. <https://doi.org/10.1090/noti2479>
- Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 29–50). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_2
- Trigueros, M. (2022). APOS Theory and the Role of the Genetic Decomposition. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 61–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_6
- Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM – Mathematics Education*, 56(6), 1093–1108. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6>
- Turgut, M., Smith, J. L., & Andrews-Larson, C. (2022). Symbolizing lines and planes as linear combinations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100948. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100948>

Wawro, M., Andrews-Larson, C., Zandieh, M., & Plaxco, D. (2022). Inquiry-Oriented Linear Algebra: Connecting Design-Based Research and Instructional Change Research in Curriculum Design. En R. Biehler, M. Liegendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen, & C. Winslów (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 329–348). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_16

**Autor de correspondencia**

Irenisolina Antelo Lopez | ireni1095@gmail.com